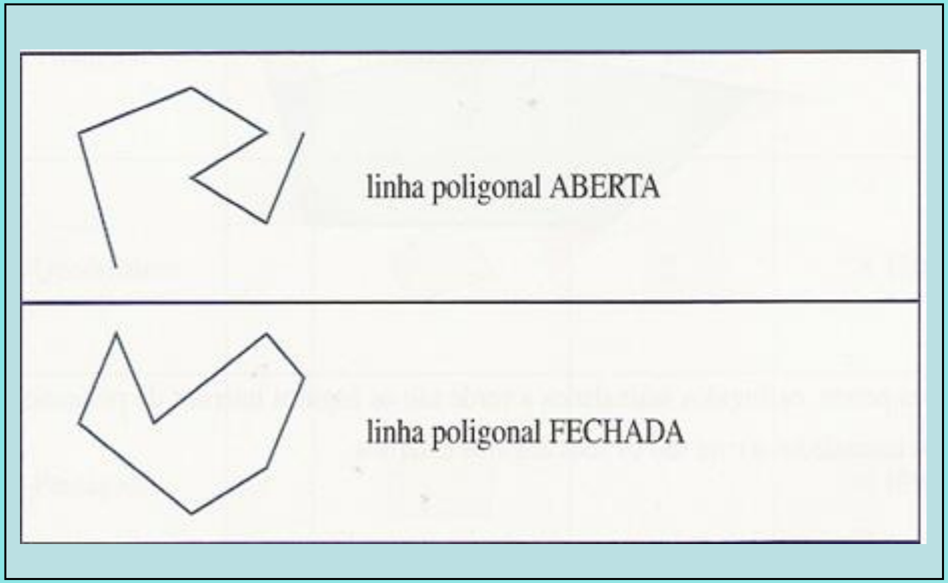
Polígonos

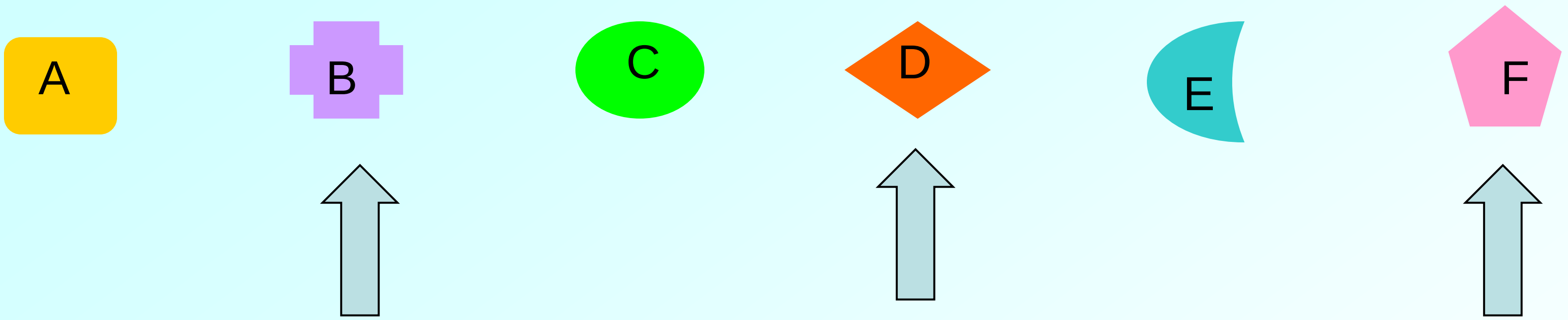
Da linha poligonal ao polígono

Uma linha poligonal é formada por segmentos de reta consecutivos, não alinhados.



Polígono é uma superfície plana limitada por uma linha poligonal fechada.

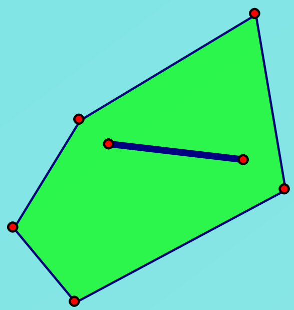
Dos exemplos a seguir indica os que são polígonos. Justifica.



A, C e E não são polígonos porque os seus lados não são formados apenas segmentos de reta.

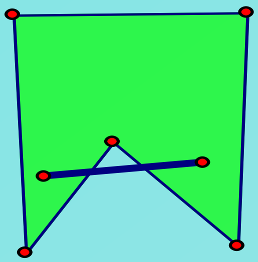
Existem polígonos convexos e polígonos côncavos:

Polígono convexo



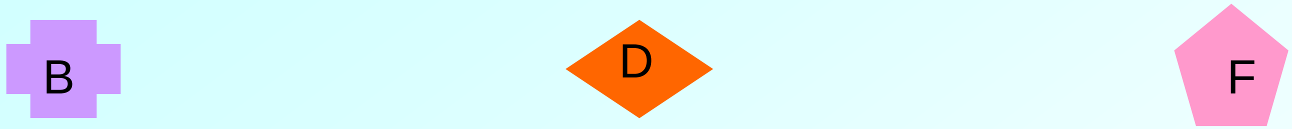
Se unires dois quaisquer dos seus pontos, o segmento de reta obtido está sempre contido no polígono.

Polígono côncavo



Existem sempre pelo menos, dois dos seus pontos que unidos, formam um segmento de reta que não está contido no polígono.

Dos polígonos seguintes indica os que são convexos e os que são côncavos.



Já sabes que:

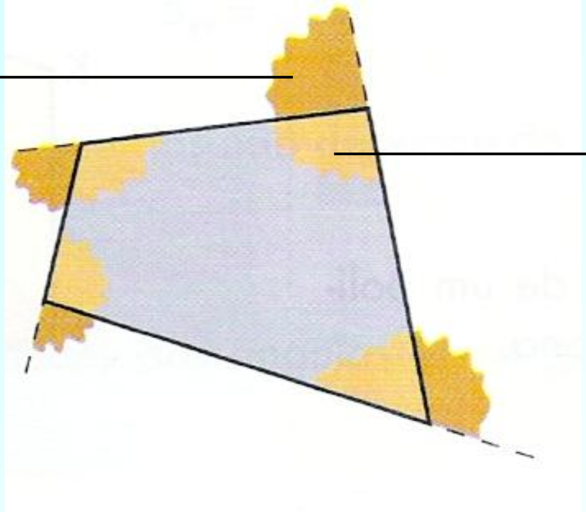
O polígono com o menor nº de lados é o triângulo.

A soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.

Ângulos internos e externos de um polígono convexo

O **ângulo externo** de um polígono é o ângulo formado por um dos seus lados e pelo prolongamento de um dos lados adjacentes.

Ângulo externo



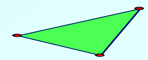
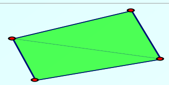
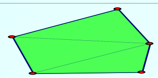
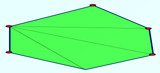
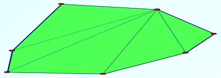
Ângulo interno

O **ângulo interno** de um polígono é o ângulo formado por dois lados consecutivos.

Repara que a soma da amplitude de um ângulo interno com o respetivo ângulo externo é sempre 180º.

Soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono

Um polígono convexo pode ser decomposto em triângulos a partir de um dos vértices do polígono.

Polígono	N.º de lados	Exemplo	N.º de triângulos em que ficou dividido	Soma dos ângulos internos de um polígono
Triângulo	**3**		1	1x180º
Quadrilátero	**4**		**2**	2x180º
Pentágono	**5**		**3**	3x180º
Hexágono	**6**		**4**	4x180º
Heptágono	**7**		**5**	5x180º
...	...	...	...	...
Polígono de 10 lados (decágono)	**10**	...	**8**	(10-2)x180º
...	...	...	...	...
Polígono de n lados	**n**		**n-2**	**(n-2)x180º**
...	...	...	...	...

Do preenchimento do quadro podemos concluir que…

A soma, $S_{i,}$ das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com n lados é dada pela expressão:

$$S_i=(n-2)\times 180^\circ$$

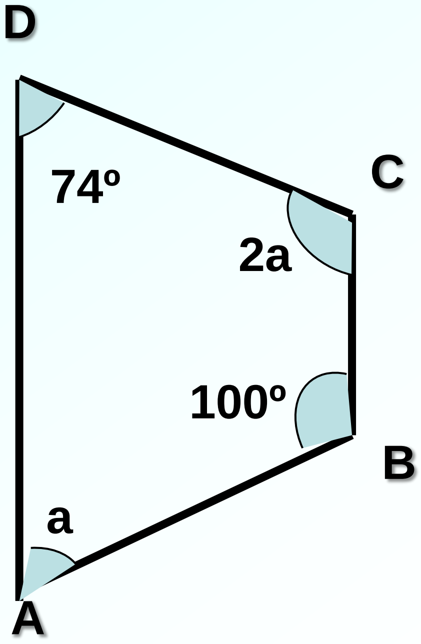
Exemplos:

Determina a soma dos ângulos internos de um dodecágono.

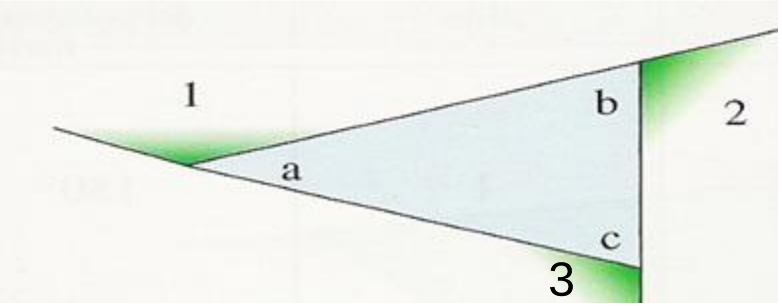
A soma dos ângulos internos de um polígono é 900º. Qual é o número de lados do polígono?

Na figura está representado um quadrilátero ABCD. Atendendo aos dados da figura, determina:

a) O valor de a;
b) A amplitude do ângulo C.



Soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono



Observa o triângulo:

$$\left(\hat{1}+\hat{a}\right)+\left(\hat{2}+\hat{b}\right)+\left(\hat{3}+\hat{c}\right)=3\times 180^{\circ}\Leftrightarrow$$

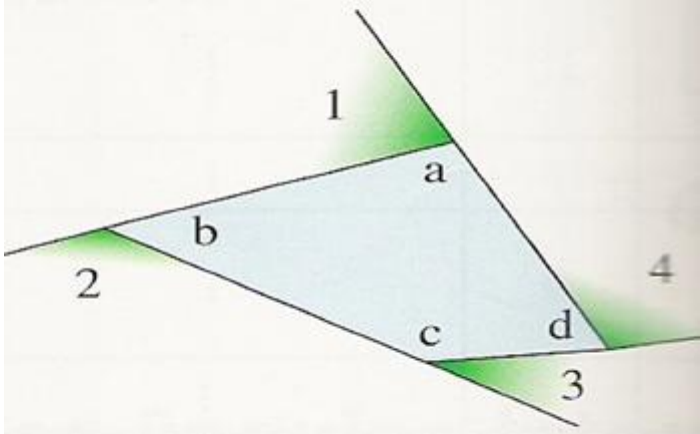
$$\Leftrightarrow \hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=3\times 180-\left(\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=3\times 180-180^{\circ}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=540^{\circ}-180^{\circ}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=360^{\circ}$$

Vamos ver o que se passa com o quadrilátero



$$\left(\hat{1}+\hat{a}\right)+\left(\hat{2}+\hat{b}\right)+\left(\hat{3}+\hat{c}\right)+\left(\hat{4}+\hat{d}\right)=4\times 180^{o}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}=4\times 180-\left(\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}\right)\Leftrightarrow$$

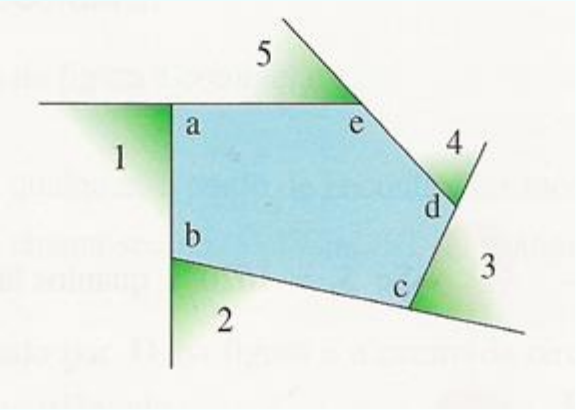
$$\Leftrightarrow\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}=4\times 180-2\times 180^{o}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}=720^{o}-360^{o}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}=360^{o}$$

Vejamos ainda o que acontece com o pentágono:

Observando o pentágono da figura e utilizando o raciocínio anterior, calcula a soma das amplitudes dos seus ângulos externos.



$$\hat{1}+\hat{a}+\hat{2}+\hat{b}+\hat{3}+\hat{c}+\hat{4}+\hat{d}+\hat{5}+\hat{e}=5\times180^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5})+(\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e})=5\times180^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}=5\times180^0-3\times180^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}=360^0$$

De uma maneira geral, se o polígono tiver n lados vem:

$$S_i + S_e = n \times 180^0 \Leftrightarrow$$

Como $S_i = (n-2) \times 180^0$ podemos escrever:

$$\Leftrightarrow (n-2) \times 180 + S_e = n \times 180^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{180^0 n} - 360^0 + S_e = \cancel{180^0 n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_e = 360^0$$

Conclusão:

A soma das amplitudes dos **ângulos externos de um polígono convexo** é sempre igual a 360^0 .

Geogebra

Polígonos **regulares**

A **amplitude do ângulo ao centro** de um polígono regular de n lados é $\dfrac{360^{\circ}}{n}$.

A amplitude do **ângulo externo é** $\dfrac{360^{\circ}}{n}$, igual à amplitude do ângulo ao centro.

A amplitude de cada **ângulo interno é igual** ao quociente entre a soma das amplitudes dos ângulos internos pelo número de lados do polígono.

$$\frac{(n-2)\times 180^{\circ}}{n}$$

n lados logo n é um nº …

Exercícios:

1. O ponto A é um dos vértices de um polígono. Sabe-se que a soma dos ângulos internos é 1080º e o ângulo interno de vértice A mede 74º.

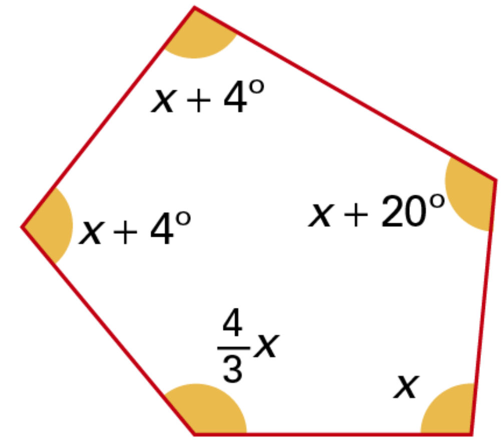
Determina:

a) O número de lados do polígono;

b) A medida do ângulo externo de vértice A.

2. **Num polígono regular cada ângulo interno tem 162º. Qual é o polígono em causa?**

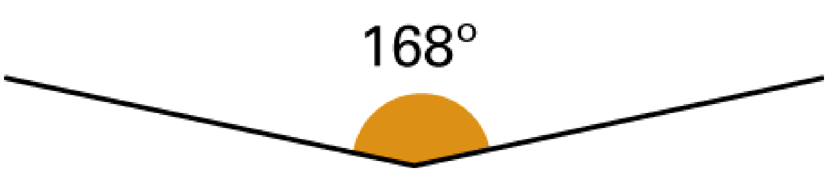
Tendo em conta as medidas das amplitudes dos ângulos internos do polígono, determina *x*.



A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular é 144º.
Quantos lados tem o polígono?

☐ 6 ☐ 8 ☐ 10 ☐ 12

Na figura seguinte, podes observar dois lados consecutivos de um polígono regular.



Qual é a soma dos ângulos internos deste polígono?

No. de lados	Polígono	No. de lados	Polígono
1	não existe	11	undecágono
2	não existe	12	dodecágono
3	triângulo	13	tridecágono
4	quadrilátero	14	tetradecágono
5	pentágono	15	pentadecágono
6	hexágono	16	hexadecágono
7	heptágono	17	heptadecágono
8	octógono	18	octadecágono
9	eneágono	19	eneadecágono
10	decágono	20	icoságono

EXERCÍCIOS DA PÁGINA 43, 44 E 45

1. Considera um decágono regular:
1.1. Qual a soma das amplitudes dos seus ângulos internos?
1.2. Qual a soma das amplitudes dos seus ângulos externos?
1.3. Qual a amplitude de cada ângulo interno?
1.4. Qual a amplitude de cada ângulo externo?

2.
2.1. Quantos lados tem um polígono cujas amplitudes dos ângulos internos somam 1980º?
2.2. Existirá algum polígono convexo cujas amplitudes dos ângulos internos somem 7500º?

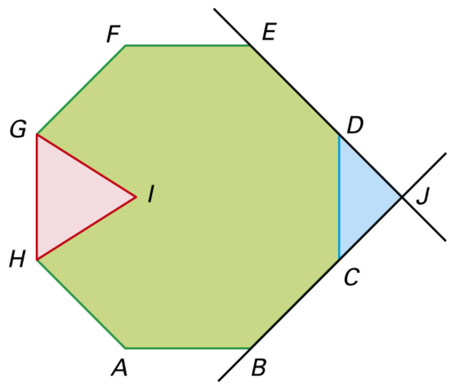
3. Num certo polígono regular, cada ângulo externo mede 30º.
3.1. Quantos lados tem esse polígono?
3.2. Quanto mede cada ângulo interno?
3.3. Qual é a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos desse polígono?
3.4. Num polígono regular com o dobro do número de lados do anterior, quanto medirá cada ângulo interno?

4. Qual é o número mínimo de lados que um polígono convexo deve ter para que a soma das amplitudes dos seus ângulos internos seja superior a 3000°?

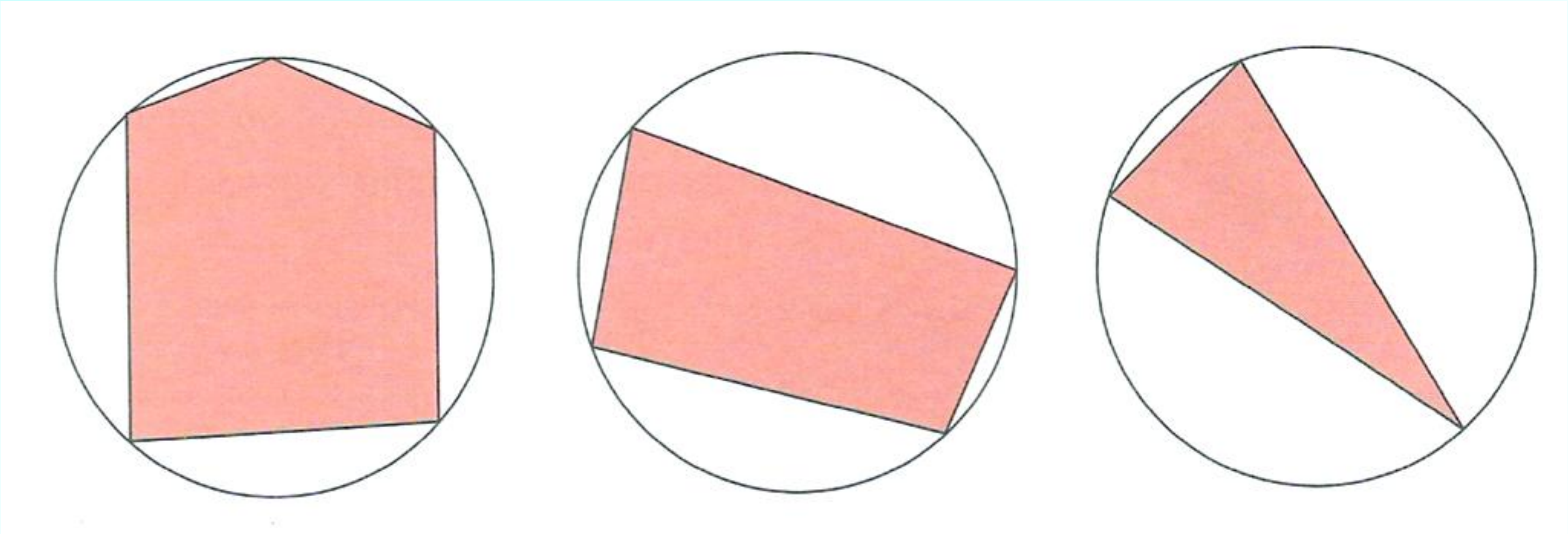
5. Considera a figura em que [*ABCDEFGH*] é um octógono regular e [*GHI*] é um triângulo equilátero.

5.1. Determina a amplitude dos ângulos *EDC* e *IGF*.

5.2. Mostra que o triângulo [*DCJ*] é um triângulo retângulo isósceles.



POLÍGONOS INSCRITOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA



Um **polígono está inscrito numa circunferência** se todos os seus vértices forem pontos da circunferência.

Nestes 3 casos, os polígonos estão inscritos nas circunferências. Então, as **circunferências dizem-se circunscritas aos polígonos.**

Qualquer triângulo pode sempre inscrever-se numa circunferência, basta determinar circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes - centro da circunferência).

Geogebra (Triângulo e pontos notáveis de um triângulo)

E relativamente aos quadriláteros?

Qualquer quadrilátero pode ser inscrito numa circunferência?

Geogebra

Não...

Apenas os quadriláteros cujos ângulos opostos são suplementares.

Num quadrilátero inscrito numa circunferência, **a soma das amplitudes de dois ângulos opostos é 180º (os ângulos opostos são suplementares).**

Como inscrever polígonos regulares numa circunferência

Inscreve um pentágono regular [ABCDE] numa circunferência de centro O e raio à tua escolha.

1. Desenha uma circunferência
2. Calcula a amplitude do ângulo ao centro (360º: 5 = 72º)
3. Sendo O o centro da circunferência, com um transferidor marca um ângulo de centro O e amplitude 72º
4. A partir de A e abertura do compasso igual a amplitude do arco AB marca os restantes pontos
5. Une os pontos de modo a obter o pentágono.

Um polígono regular pode sempre inscrever-se numa circunferência.

Importante:

O lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência é igual ao raio dessa circunferência

GEOGEBRA

Polígonos regulares

Um **polígono** diz-se **regular** se tem todos os seus lados com o mesmo comprimento e todos os ângulos com a mesma amplitude.

Exemplos:

O triângulo equilátero e o quadrado são disso exemplo.

Geogebra

Polígonos **regulares**

A **amplitude do ângulo ao centro** de um polígono regular de n lados é $\frac{360^{\circ}}{n}$.

A amplitude do **ângulo externo é** $\frac{360^{\circ}}{n}$, igual à amplitude do ângulo ao centro.

A amplitude de cada **ângulo interno é igual** ao quociente entre a soma das amplitudes dos ângulos internos pelo número de lados do polígono.

$$\frac{(n-2)\times 180^{\circ}}{n}$$

A saber…

Em polígonos regulares:

A **amplitude de um ângulo ao centro** é igual à **amplitude de um ângulo externo.**

$$\frac{360}{n}, \quad n$$ é o número de lados do polígono

EXERCÍCIOS DA PÁGINA 47, 48 E 49