

MONÓMIOS
E
POLINÓMIOS

POLINÓMIOS

$$-\frac{1}{2}x - 6$$

$$2a + 3$$

$$2x^2 - 3$$

$$7x - 4$$

$$y^2 - 4y - 3$$

Exemplos de várias expressões algébricas.

Uma expressão algébrica é constituída por um ou mais termos.

No polinómio $y^2 - 4y - 3$, às parcelas, y^2 , $-4y$ e -3 chamam-se **termos ou monómios**.



Um **polinómio** é uma soma algébrica de pelo menos dois monómios..

Exemplos:

$y^2 - 4y$ **Binómio**, porque é constituído por dois monómios.

$4x^2 - 4x - 30$
 $7y^2 - 4xy - 7xy$ } **Trinómios**
cada expressão é constituído por 3 monómios

MONÓMIOS

Curiosidade:

Monómio é uma palavra de origem grega, derivada de *monos*, que significa *único*. Monómio significa único termo.



Um **monómio** é uma expressão que pode ser constituída por um número ou por um produto de números em que alguns podem ser representados por letras.

Exemplos:

$$\begin{array}{l} M^3 \\ -xy \end{array} \quad \begin{array}{l} 23x \\ \times \\ -\frac{y}{4} \end{array}$$

6

NOTA

$$-\frac{y}{4} = -\frac{1}{4} \times y = -\frac{1}{4}y$$

Nota: Num monómio não aparecem adições nem subtrações.

Constituição de um monómio

Exemplo:

$$-7y^3$$

Neste monómio podemos distinguir uma **parte numérica** ou **coeficiente** (-7) e uma **parte literal** (y^3).

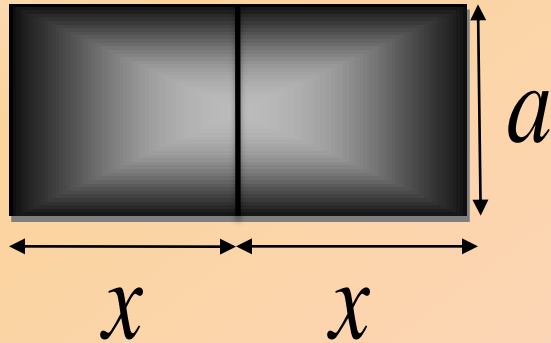
Exercício:

Completa a tabela seguinte:

Monómio	Coeficiente	Parte literal
x	1	x
-10	-10	—
$-\frac{z}{6}$	$-\frac{1}{6}$	z
$5yz$	yz	5
$-89xyz$	-89	xyz

Como escrever corretamente um monómio?

Exemplo I

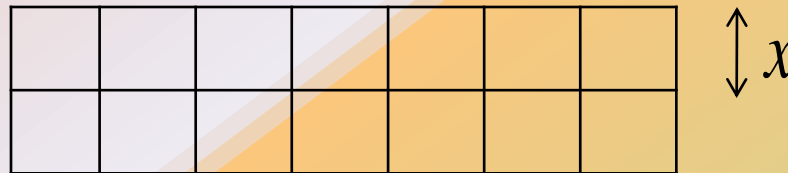


A área do maior retângulo da figura ao lado pode ser dada pela expressão:

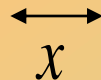
$$2 \times x \times a \quad \text{mas deve escrever-se: } 2ax$$

Exemplo II

Observa a figura:



Qual a sua área?



$$7x \times 2x = 14x^2$$

O produto de dois monómios é outro monómio cujo coeficiente é o produto dos coeficientes e cuja parte literal é o produto das partes literais.

Convencionou-se que para escrever um produto de vários fatores (um monómio) escreve-se primeiro os números, e, em seguida, as letras por ordem alfabética.
Por exemplo:

Monómio	Escrita correta
$x \times 5 \times y$	$5xy$
$5 \times b \times a \times 3$	$15ab$
$-3 \times q \times (-2) \times p$	$6pq$
$3 \times a^2 \times b \times (-2) \times a \times b$	$-6a^3b^2$

Grau de um monómio

6



grau 0

$6a$



grau 1

$6a^2$



grau 2

$6a^3$



grau 3

$6a^3b$



grau 4

$6a^5b^2$



grau 7

Então, como se determina o grau de um monómio?

O grau de um monómio é igual à soma dos expoentes das letras que nele figuram (à soma dos expoentes da parte literal).

Exercício:

Completa a tabela:

Monômios				
	$7xy$	$-23x^2y^3$	$\frac{8}{3}$	$7x^4y$
Grau				

Monómios semelhantes

Considera o seguinte polinómio: $6x^4 + 7x + 9 - 4x$

este polinómio é constituído por 4 monómios $6x^4$, $7x$, $-4x$ e 9 .

Os monómios

$7x$ e $-4x$ são semelhantes.

**Mais
exemplos:**

$-4y$ e $19y$

$-4y^2$ e $56y^2$

$887xy^2z$ e $-4xy^2z$

**Dizem-se monómios semelhantes.
Conseguirás chegar à definição?**

Monómios semelhantes - são monómios que têm a mesma parte literal.

Os monómios $-4x$ e $6x^4$ não são semelhantes porque não têm a mesma parte literal.

Monómios simétricos - são monómios com a mesma parte literal e coeficientes simétricos.

$$-19y \text{ e } 19y$$

Grau de um polinómio

Consideremos o polinómios e o respetivo grau.

$$6x^4 - 5x^2 + 1 \quad \text{O grau deste polinómio é 4}$$

$$x^6 - 5x^5 + 4x - x - 1 \quad \text{Grau 6}$$

$$x^3 - 1 \quad \text{Grau 3}$$

Definição:

Chama-se **grau de um polinómio** é o maior dos graus dos monómios que o constituem.

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Exemplos:

1. O polinómio

$$6x^4 + 7x + 9 - 4x = 6x^4 + 3x + 9$$



Polinómio reduzido porque não tem termos semelhantes

2. Transforma num polinómio reduzido os seguintes polinómios:

$$6x^4 + 7y + 9x^4 - 4y + 12 =$$

$$= 15x^4 + 3y + 12$$

Simplificar um polinómio é reduzir os termos semelhantes

$$6y^3 - 2y + 5 - (-7y^3 + y^2 - 3y + 10) =$$

$$= 6y^3 - 2y + 5 + 7y^3 + y^2 - 3y + 10 =$$

$$= 13y^3 + y^2 - 5y + 15$$

*Produto de um monômio
por um polinômio*

Para multiplicar um monómio por um polinómio, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, isto é, multiplica-se o monómio por cada um dos termos do polinómio.

$$-2(-3x + 3 + x - 1) = 6x - 6 - 2x + 2$$

Multiplicação de polinômios

$$(x+8)(x+2)$$

1.ª processo:

$$\begin{aligned}(x+8)(x+2) &= x(x+2) + 8(x+2) = \\ &= x^2 + 2x + 8x + 16 = \\ &= x^2 + 10x + 16\end{aligned}$$

$$x^2 + 10x + 16$$



Polinómio reduzido

2.ª processo:

$$\begin{aligned}(x+8)(x+2) &= x^2 + 2x + 8x + 16 = \\ &= x^2 + 10x + 16\end{aligned}$$

Para multiplicar polinómios, multiplica-se cada termo de um, por todos os termos do outro, obtendo-se assim um novo polinómio.

Exercício:

Transforma num polinómio reduzido:

$$(3x-2)(-x+5)$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)(2x+6)$$

$$2x^2(-3x^4) + (10x^3)^2$$

$$\left(\frac{1}{3}y\right)^2 - 10\left(0,4y - \frac{1}{3}y^2\right)$$

$$\left(x^2 - 2x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

$$(x+5)(3x+1) - 2(x^2 - 3)$$

Se tivermos dois polinómios de graus 2 e 4 então a multiplicação desses polinómios dará um polinómio de grau 6

OBSERVAÇÃO:

$$(3x^2 - 2)(-x^4 + 5) = -3x^6 + 15x^2 + 2x^4 - 10$$



Polinómio de grau 2



Polinómio de grau 4



Polinómio de grau 6

A multiplicação de um polinómio de grau 2 por um polinómio de grau 4 é um polinómio de grau 6.

$$\text{grau}(P \times Q) = \text{grau}(P) + \text{grau}(Q)$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)(2x + 6)$$



**CASOS NOTÁVEIS
DA
MULTIPLICAÇÃO**

Quadrado de um binómio

Entre todos os produtos de polinómios há dois casos que têm um interesse particular, não só pela sua aplicação a muitas situações, como pela sua ligação à geometria.

Um polinómio com dois termos, ou seja, com dois monómios, também se pode chamar BINÓMIO.

$$x + 5$$

Se $x + 5$ é um binómio, então $(x + 5)^2$ representa o quadrado de um binómio.



Já vimos que $(x + 5)^2$ pode ser visto como o produto de 2 polinómios, então:

$$\boxed{(x + 5)^2} = (x + 5)(x + 5)$$

$$= x^2 + 5x + 5x + 25 =$$

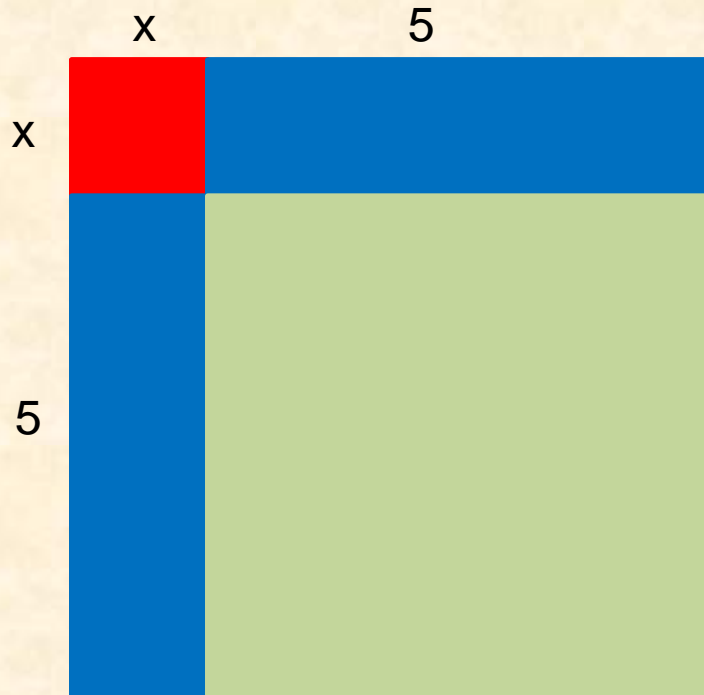
$$\boxed{= x^2 + 10x + 25}$$

Temos dois termos semelhantes, logo é possível simplificar.

GEOMETRICAMENTE

$$(x + 5)^2$$

Este quadrado de um binómio pode ser visto como a área de um quadrado de lado $x+5$.



Decompondo a figura a área é igual à soma das áreas de cada uma das figuras

$$x^2$$

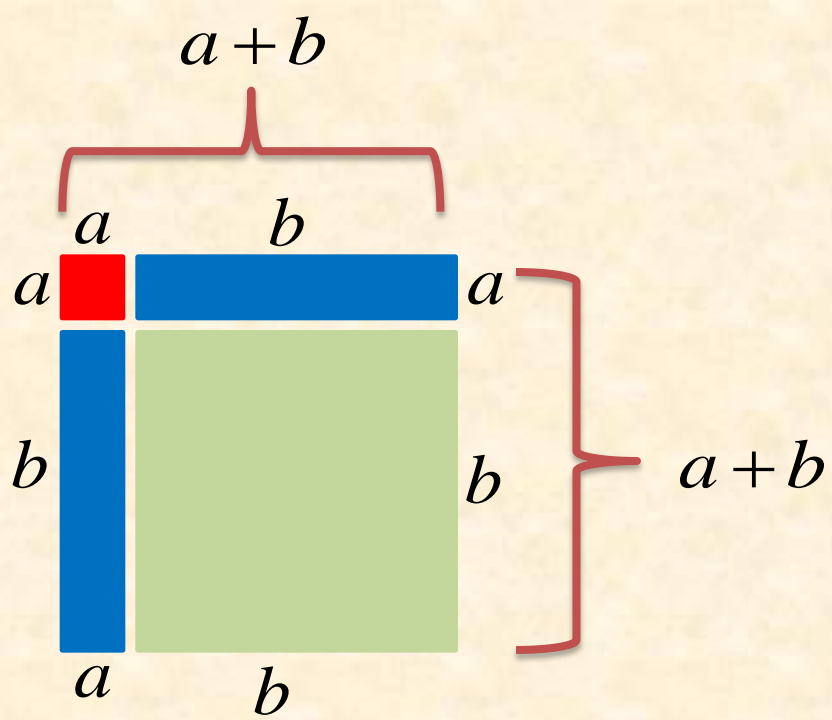
$$5x$$

$$5x$$

$$25$$



$$\begin{aligned} A &= x^2 + 5x + 5x + 25 \\ &= x^2 + 10x + 25 \end{aligned}$$



$$(a+b)^2 =$$

$$= \text{red } a^2 + \text{blue } ab + \text{blue } ab + \text{green } b^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplos:

$$(x-3)^2 =$$

$$= (x-3)(x-3) =$$

$$= x^2 - 3x - 3x + 9 =$$

$$= x^2 - 6x + 9$$

$$(-3x-2y)^2 =$$

SERÁS CAPAZ DE DESCOBRIR UMA REGRA QUE TE PERMITA PASSAR DIRETAMENTE DA 1.ª EXPRESSÃO PARA A ÚLTIMA!!!

QUADRADO DE UM BINÓMIO

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= (a \pm b)(a \pm b) = \\ &= a^2 \pm ab \pm ab + b^2 = \\ &= a^2 \pm 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\underbrace{(a \pm b)^2}_{\text{}} = \underbrace{a^2}_{\text{}} \underbrace{\pm 2ab}_{\text{}} \underbrace{+ b^2}_{\text{}}$$

a é o 1.º termo do binómio

b é o 2.º termo do binómio

Quadrado do
1.º termo

Dobro do 1.º
termo pelo 2.º
termo

Quadrado
do 2.º termo

Exemplos

- Quadrado de binómio:

$$(x + 6)^2 = x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$(5 + 3x)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3x + (3x)^2 = 25 + 30x + 9x^2$$

$$(y + 2x)^2 = y^2 + 2 \times y \times 2x + (2x)^2 = y^2 + 4xy + 4x^2$$

$$(7a + 3b)^2 = (7a)^2 + 2 \times 7a \times 3b + (3b)^2 = 49a^2 + 42ab + 9b^2$$

Exemplos

- Quadrado de um binómio

$$(a - 5b)^2 = a^2 - 2 \times a \times 5b + (5b)^2 = a^2 - 10ab + 25b^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9 - 3x + \frac{x^2}{4}$$

Conclusões

- ✘ O quadrado de um binómio é um trinómio.
- ✘ No trinómio aparecem os quadrados dos dois termos do binómio.
- ✘ O sinal do termo do desenvolvimento $2ab$ é:
 - + se os dois termos do binómio têm o mesmo sinal.
 - - se os dois termos do binómio têm sinais contrários.

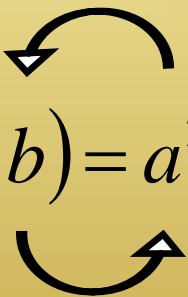
Diferença de quadrados

De um modo geral,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Quadrado do 1.º termo

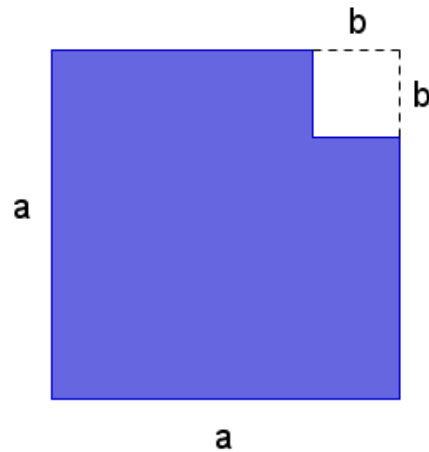
Quadrado do 2.º termo


$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

É importante ler a igualdade nos dois sentidos.

GEOMETRICAMENTE

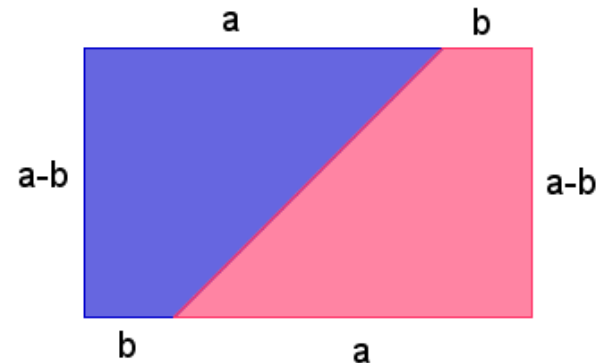
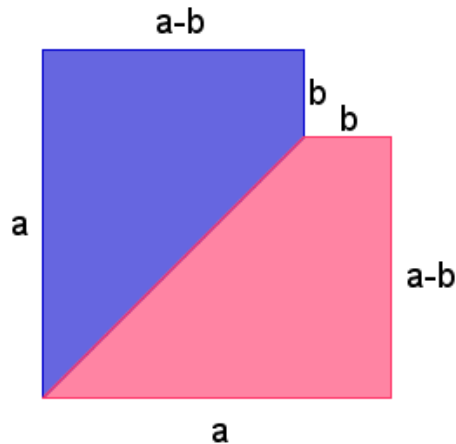
Observa a figura.



Assim:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Repara que a figura é um hexágono que se obteve retirando ao quadrado de lado a , um outro quadrado, mais pequeno, de lado b . Sendo assim, a sua área é dada por $a^2 - b^2$.



Por outro lado, tal como se pode observar nas figuras anteriores, decompondo o hexágono e reagrupando as partes, chegamos à conclusão que a área da figura também pode ser dada por $(a - b)(a + b)$.

Observa :

$$\rightarrow (x-3)(x+3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$$

$$\rightarrow (5x-8)(5x+8) = 25x^2 - 8x + 8x - 64 = 25x^2 - 64$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{5} - 3y\right)\left(\frac{1}{5} + 3y\right) = \frac{1}{25} + \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}y - 9y^2 = \frac{1}{25} - 9y^2$$

Repara que:

- Cada expressão dada é um produto de dois binómios, que só diferem num sinal. Têm um termo em comum e o outro é simétrico.
- O sinal, -, da diferença fica associado ao quadrado do termo que tem sinal diferente.
- A expressão que se obteve em cada caso é uma **diferença de quadrados**.

Mais Exemplos

- Diferença de quadrados

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$$

$$16 - 4a^2 = 4^2 - (2a)^2 = (4 + 2a)(4 - 2a)$$

$$\frac{1}{4} - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{3}\right)$$

As igualdades

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

são casos particulares da multiplicação de polinómios. Chamam-se por isso, **CASOS NOTÁVEIS DA MULTIPLICAÇÃO**.

Resumo

- **Quadrado de um binómio:**

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = \color{red}{+} a^2 \pm 2ab \color{red}{+} b^2$$

- **Diferença de Quadrados:**

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exercício 1

- **Escreve um polinómio equivalente a:**

$$(7 + 4x)^2 \qquad \left(\frac{a}{7} - \frac{2}{3}\right)^2$$

- **Resolução:**

$$(7 + 4x)^2 = 49 + 56x + 16x^2$$

$$\left(\frac{a}{7} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{49} - \frac{4a}{21} + \frac{4}{9}$$

Exercício 2

Desenvolve e reduz os termos semelhantes

$$(x-3)(x+3) + (x+3)^2$$

Consolidação dos conhecimentos

Exercícios da página 53 e 55

**TPC- terminar os
exercícios não realizados
na aula**

*Decomposição de
um polinómio em
fatores*

DECOMPOSIÇÃO EM FACTORES



Recordar...

$A+B$ é uma soma
 A e B são parcelas

$A \times B$ é um produto
 A e B são os fatores

Fatorizar um polinómio é escrevê-lo sob a forma de um produto de dois ou mais fatores.

Para decompor um polinómio em fatores, aplicando a propriedade distributiva, procuram-se os fatores comuns e colocam-se em evidência.

Factoriza a seguinte expressão:

$$4x+5xy = \dots \mathbf{x} \dots \times \dots \mathbf{(4+5y)} \dots$$



Factor comum



Expressão obtida suprimindo o factor comum

Se multiplicares o factor comum pela expressão dada, terás de obter a expressão inicial. Caso contrário, a expressão está mal factorizada.

$$= 4x+5xy$$

Colocámos em evidência o factor x.

Para decompor um polinómio em fatores é necessário:

- ➔ **Identificar o fator comum**
- ➔ **Pôr em evidência esse fator.**

MAIS

EXEMPLOS:

$$10x + 10y = 10(x + y)$$

$$\begin{aligned} x(y - 3) + 5(y - 3) &= \\ &= (y - 3)(x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b^2 - 6b &= \\ &= \underline{3b}b - 2 \times \underline{3b} = 3b(b - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 16 &= \\ &= 4(x - 4) \end{aligned}$$

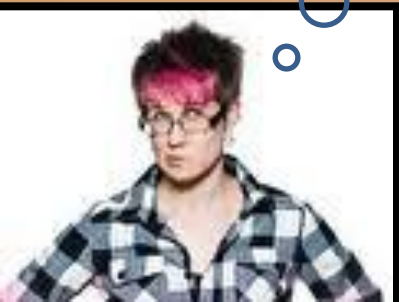
$$\begin{aligned} 3x + 10xy &= \\ &= x(3 + 10y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - xy &= \\ &= 2\underline{x}x - \underline{x}y = x(2x - y) \end{aligned}$$

$$x + 5x^2 - 7xy =$$

$$x(1 + 5x - 7y)$$

**Ponho o x em
evidência mas e
depois!!!**



Os casos notáveis e a decomposição em factores

• Diferença de quadrados $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$$

$$1 - m^2 = (1 + m)(1 - m)$$

$$9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$$

$$-\frac{4}{9} + c^2 = \left(-\frac{2}{3} + c\right)\left(\frac{2}{3} + c\right)$$

$$x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$$

QUADRADO DE UM BINÓMIO

$$x^2 + 4x + 4 \\ = (x + 2)^2$$

$$9a^2 - 42a + 49 = \\ (3a - 7)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 \\ (x - 4)^2$$

$$2x^2 - 16x + 32 = \\ 2(x^2 - 8x + 16) = \\ 2(x - 4)^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 \\ = (2x + 5)^2$$

LEI DO
ANULAMENTO
DO PRODUTO

Lei do anulamento do produto

Nota: O símbolo \vee
lê-se *ou*.

Reparem que:

$$4 \times 0 = 0 \quad 0 \times (-5) \times 6 = 0$$

$$0 \times 0 = 0$$

Um produto é nulo se e só se (sse) pelo menos um dos seus factores é nulo.

Assim, se o produto de dois (ou mais) factores é zero, então, pelo menos um dos factores é zero.

Ou seja,

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$$



Esta propriedade é conhecida pela **LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO**.

A lei do anulamento do produto permite resolver equações de grau superior ao primeiro.

Mas, será possível aplicar a lei do anulamento do produto na resolução de qualquer equação?!

Atenção, para aplicar a lei do anulamento do produto na resolução de equações, é necessário que:

- ☞ Um dos membros esteja fatorizado (produto de fatores);
- ☞ E que o outro membro seja zero.

$$(x - 4)(x + 7) = 0$$

Exemplos:

$$\Rightarrow (x - 4)(x + 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 4) = 0 \vee (x + 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -7$$

$$S = \{-7\} \cup \{4\} = \{-7, 4\}$$

Conseguirás
descobrir
mentalmente
as soluções?

Ao aplicar esta lei, obtemos uma **disjunção** de duas condições, a que corresponde a **reunião** de dois conjuntos-solução.



$$x(x + 74)(2x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 74 = 0 \vee 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -74 \vee x = -1$$



$$2(x + 74)(2x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 74 = 0 \vee 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -74 \vee x = -1$$



$$5x^2 - 10x = 0$$

Para aplicar a lei do anulamento do produto, é necessário fatorizar o 1.º membro da equação.

$$5x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$S. = \{0, 2\}$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \vee 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \quad S. = \{-1/2\}$$

-0,5 é raiz dupla

$$x^2 + 14x + 49 = 0$$

$$16 = (3x + 1)^2$$

Resolva, por dois processos diferentes, as equações seguintes.

$$4x^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$$

ou

$$4x^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \vee 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$

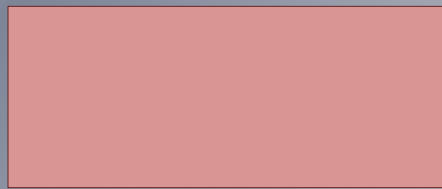
Algumas equações também podem ser resolvidas utilizando a noção de raiz quadrada.

$$x^2 + 20 = 0$$



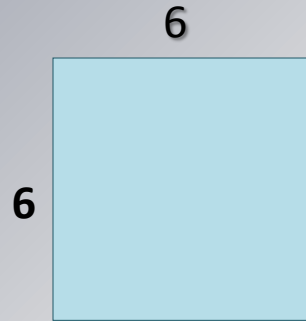
**Equação
impossível**

Problema: Observa as figuras.



$x - 4$

$x - 9$



6

6

Sabendo que as figuras são equivalentes, determina as dimensões do rectângulo.

$$(x - 9)(x - 4) = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 9x + 36 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 13x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x - 13) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 13$$

Um voluntário?!

R.: 4 por 9