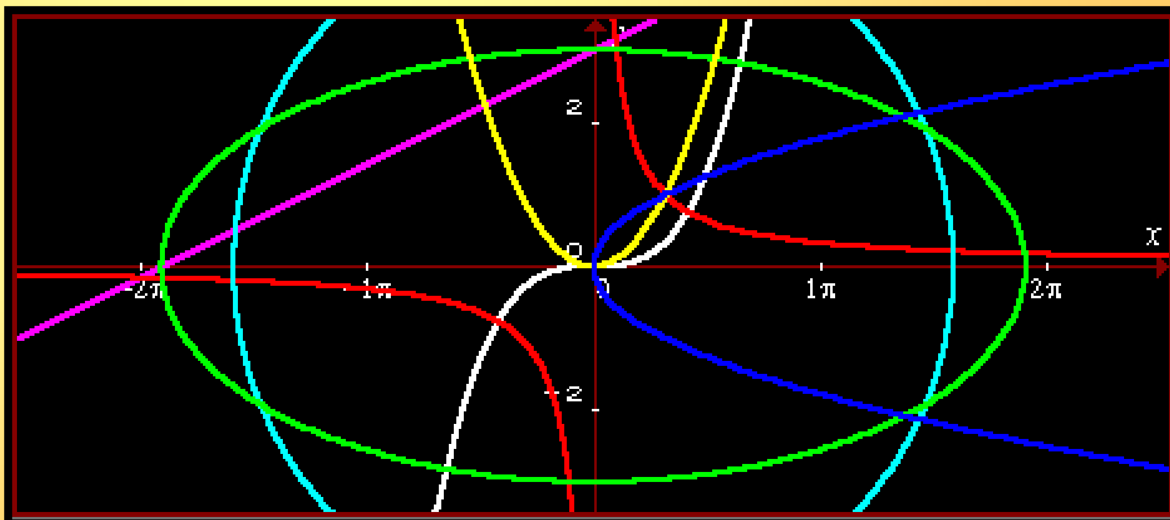
FUNÇÕES

Não fujas da Matemática!



Problema:

O pai do Filipe decidiu propor ao seu filho um negócio, que consistia em lavar o seu carro pagando-lhe assim uma quantia de 1,5 euros por hora.
Se o Filipe demorar 3 horas e meia a lavar o carro ao pai, quanto ganha?

Resolução:

Tempo (em horas)		Dinheiro (em euros)
1	———————	1,5
3,5	———————	x

$$x = 3{,}5 \times 1{,}5 = 5{,}25$$

R.: Em 3,5 horas o Filipe ganhou 5,25 euros.

E se o Filipe demorasse apenas 2 horas e 12 minutos a lavar o carro, quanto teria ganho?

Tempo (em horas)		Dinheiro (em euros)
1	————	1,5
2,2	————	x

$$x = 2{,}2 \times 1{,}5 = 3{,}3$$

R.: Em 2,2 horas o Filipe teria ganho 3,3 euros (3 euros e 30 cêntimos).

E se demorasse apenas 1 hora e meia?

Tempo (em horas)		Dinheiro (em euros)
1	————	1,5
1,5	————	x

$$x = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$$

C.A.

2 horas e 12 minutos, corresponde a quantas horas!

1	————	60
x	————	12

$$x = \frac{1 \times 12}{60} = 0{,}2$$

2 h:12 min corresponde 2,2 horas

R.: Em 1,5 horas o Filipe teria ganho 2,25 euros.

Observemos então a tabela com toda a informação anterior.

Tempo (horas)- x	1	1,5	2,2	3,5
Quantia recebida (euros) - y	1,5	2,25	3,3	5,25

1.ª questão: A quantia recebida é diretamente proporcional ao tempo de trabalho. Porquê?

Porque as duas grandezas aumentam na mesma proporção, isto é se uma duplica a outra também duplica, se uma triplica a outra também triplica, se uma se reduz a metade a outra também,… . Assim estamos perante uma situação de proporcionalidade direta.

$$\frac{y}{x} = \frac{1,5}{1} = \frac{2,25}{1,5} = \frac{3,3}{2,2} = \frac{5,25}{3,5}$$

O quociente entre as duas variáveis é sempre constante.

2.ª questão: Qual é a constante de proporcionalidade direta? O que significa?

A constante de proporcionalidade é 1,5. $k = 1,5$

Significa a quantia ganha, em euros, por uma hora de trabalho.

3.ª questão: Será que a correspondência estabelecida, representa uma função?

Sim, porque a cada objeto (tempo gasto) corresponde uma única imagem (dinheiro ganho) – correspondência unívoca.

4.ª questão: Qual a expressão analítica desta função?

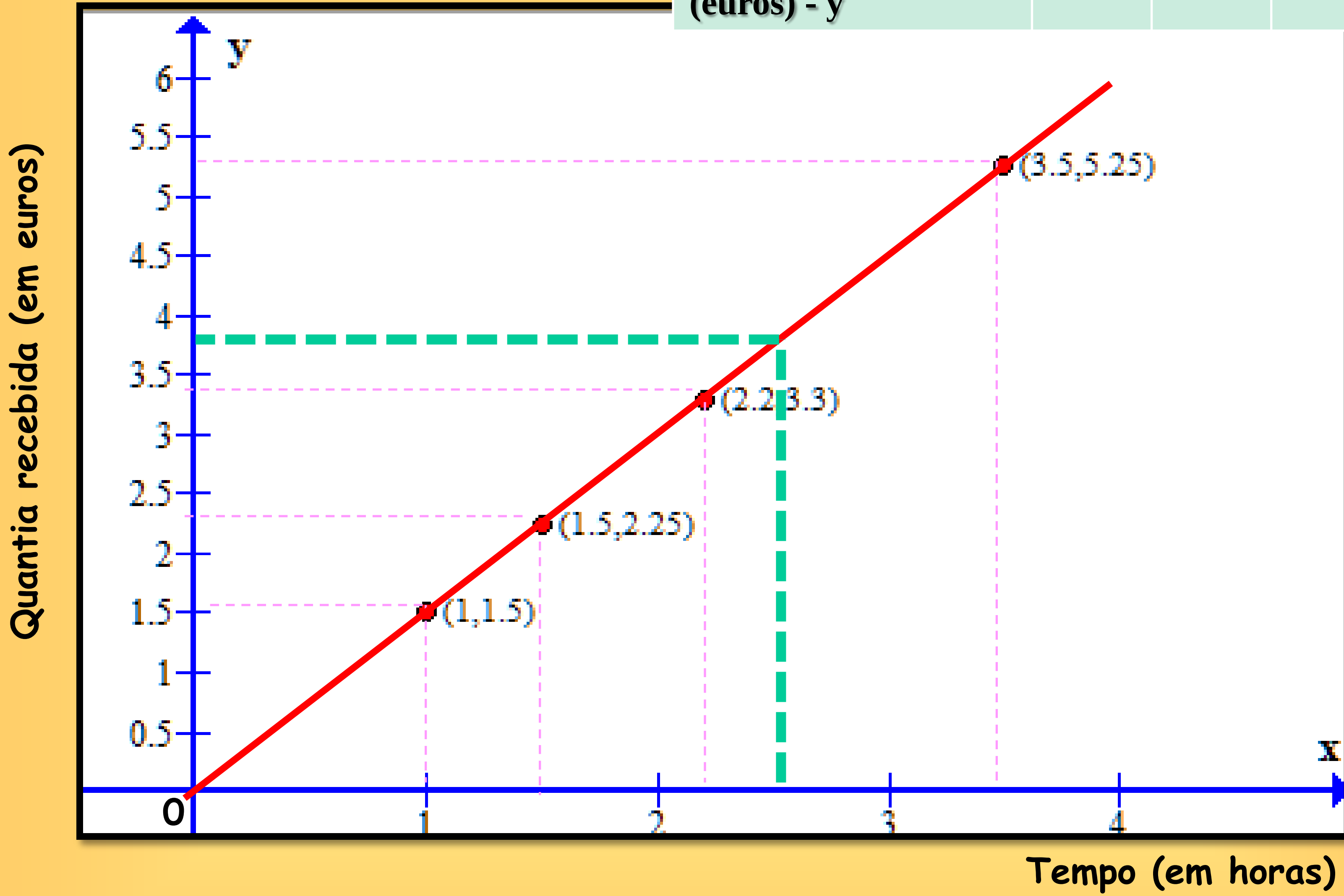
Tempo (horas)- x	1	1,5	2,2	3,5
Quantia recebida (euros) - y	1,5	2,25	3,3	5,25

$$y = 1{,}5x$$

Como esta função traduz uma situação de proporcionalidade direta, diz-se uma **função de proporcionalidade direta**.

5.ª questão: ***Representa graficamente esta função.***

Tempo (horas)- x	1	1,5	2,2	3,5
Quantia recebida (euros) - y	1,5	2,25	3,3	5,25



Através do gráfico da função, é possível observar qual a quantia (ou um valor aproximado) que receberia o Filipe, dependendo do número de horas de trabalho.

Por exemplo: *Se o Filipe trabalhasse 2 horas e meia quanto ganharia?*

Gráfico de uma função de proporcionalidade direta

O gráfico é constituído por um conjunto de pontos que se situam sobre uma linha reta que passa pela origem do referencial.

Conclusão: **Função de proporcionalidade direta ou função afim linear**

Uma situação de proporcionalidade direta, traduz-se por uma função do tipo

$y = kx$, sendo k a constante de proporcionalidade direta.

$$\frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = kx$$

O gráfico deste tipo de funções é sempre um conjunto de pontos situados sobre uma reta que passa na origem do referencial.

Exercício 1:

Em muitos supermercados e talhos há balanças que marcam simultaneamente o peso e o preço das mercadorias.

Por exemplo, ao pesar uma determinada quantidade de carne a 10 €/kg, a balança além do seu peso, dá o seu custo.

A tabela relaciona diferentes quantidades de carne com o respetivo custo:

Peso (em gramas) x	100	200	250	300	600	1000	…
Custo (em euros) y	1	2	2,50	3	6	10	…

a) Observa a tabela e completa:

$$\frac{1}{100} = \frac{...}{200} = \frac{2,5}{...} = \frac{3}{300} = \frac{6}{...} = \frac{...}{1000} = ...$$

b) O custo é diretamente proporcional ao peso? Porquê?

c) Qual é a constante de proporcionalidade? O que representa?

d) Qual é a expressão analítica que representa esta função de proporcionalidade direta?

Exercício 2:

P.D.

Considera as tabelas:

Tabela 1

N.º de esferográficas- x	1	2	5	6
Custo (euros)-y	2	4	10	12

Tabela 2

N.º de esferográficas-x	1	2	4	6
Custo (euros)-y	1,5	3	4,8	7,2

Qual das tabelas representa uma situação de proporcionalidade direta?

N.º de esferográficas - x	1	2	5	6
Custo (euros)-y	2	4	10	12

R.: A tabela 1 porque o quociente entre as duas grandezas é constante:

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{10}{5}=\frac{12}{6}=2$$

2 é a constante de proporcionalidade direta e representa o preço, em euros, de uma esferográfica.

N.º de esferográficas-x	1	2	4	6
Custo (euros)-y	1,5	3	4,8	7,2

A tabela 2 não é uma função de proporcionalidade direta porque o quociente entre as duas grandezas não é constante:

$$\frac{1{,}5}{1}\neq\frac{4{,}8}{4}$$

Proporcionalidade Inversa

O pai da Joana jogou no Euromilhões e ouviu nas notícias:
O 1.º prémio foi de 300 000 000 de euros.

A Joana perguntou ao pai:
O que acontece se houver mais do que um totalista?

O valor do prémio, 300 milhões de euros, será dividido pelo número de totalistas.

A tabela traduz a situação descrita.

×3

×2

N.º de totalistas do euro (x)	1	2	3	4	5
Prémio que recebe cada totalista (em milhões de euros)- (y)	300	150	100	75	60

:2

: 3

Observações:

Observando a tabela, verifica-se que à medida que o número de totalistas aumenta, o prémio que recebe cada um diminui. Diz-se por isso, que existe uma relação inversa entre as variáveis x e y.
Quando o número de totalistas aumenta para o dobro o prémio que recebe cada um diminui para metade.
Se o número de totalistas triplica, o prémio diminui para a terça parte;…
Portanto ao aumento da grandeza x corresponde a diminuição da grandeza y na razão inversa.

N.º de totalistas do euro (x)	1	2	3	4	5
Prémio que recebe cada totalista (em milhões de euros)- (y)	300	150	100	75	60

- **O produto dos valores correspondentes é constante (obviamente!) isto é:**

$$1\times 300 = 300$$

$$2\times 150 = 300$$

$$3\times 100 = 300$$

300 é a constante de proporcionalidade inversa e significa o prémio a ser distribuído igualmente pelos totalistas.

Em linguagem matemática escreve-se, $$xy = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$$

Assim, podemos afirmar que as grandezas são inversamente proporcionais.

Definição: Duas variáveis x e y são inversamente proporcionais, quando o produto entre os valores de x e os valores correspondentes de y é constante (e diferente de zero).

$$xy = k$$

K, é a constante de proporcionalidade inversa.

- Se a velocidade média aumentar para o dobro, a duração da viagem diminui para metade; se aumentar para o triplo a duração da viagem diminui para a terça parte; etc. (o produto da velocidade média pela duração da viagem é constante.

- Se o aluguer de um automóvel custa 200 euros, o valor que cada pessoa paga é inversamente proporcional ao número de pessoas.

Numa situação de proporcionalidade direta:

Se uma das variáveis variar para…	…a outra varia para
O dobro	?
?	O triplo
metade	?
O quádruplo	?

y é diretamente proporcional a x ou varia na razão direta de x

Numa situação de proporcionalidade inversa:

Se uma das variáveis variar para…	…a outra varia para
O dobro	?
?	O triplo
metade	?
O quádruplo	?

y é inversamente proporcional a x ou varia na razão inversa de x

Como averiguar se duas grandezas são inversamente proporcionais?

Para aferir se duas grandezas são inversamente proporcionais, basta verificar se o produto entre quaisquer valores correspondentes é constante.

Em tabelas ou em gráficos.

Tabela 1

A	4	2	5	3
B	2,5	5	2	$\frac{10}{3}$

Tabela 2

x	1	2	3	4
y	10	9	8	7

A tabela 1 traduz uma situação de PI, uma vez que o produto entre dois quaisquer valores correspondentes é constante.

Logo A e B são inversamente proporcionais, sendo 10 a constante de proporcionalidade inversa.

$$4\times 2,5 = 2\times 5 = 5\times 2 = 3\times \frac{10}{3}$$

CUIDADO: A relação inversa **é condição necessária mas não é suficiente** para afirmar que duas grandezas são inversamente proporcionais.

Exemplo:
Se uma duplica e outra grandeza se reduz à terça parte, não são inversamente proporcionais.

4. x e y são duas grandezas **inversamente** proporcionais.

Das quatro afirmações que se seguem, apenas uma é sempre verdadeira. Qual?

- [ ] Se x aumenta 2 unidades, então y também aumenta 2 unidades.
- [ ] Se x aumenta 2 unidades, então y diminui 2 unidades.
- [ ] Se x aumenta para o dobro, então y também aumenta para o dobro.
- [x] Se x aumenta para o dobro, então y diminui para metade.

2.ª chamada exame 2007 ex. 4

Função de proporcionalidade inversa

A Francisca construiu um retângulo em que a medida da área é 100 centímetros quadrados.

$100\ cm^2$

Com esta informação é possível determinar as medidas dos lados do retângulo que ela construiu?

Largura		Comprimento
1	$\times$	100
2	$\times$	50
3	$\times$	$\frac{100}{3}$
4	$\times$	25
6	$\times$	16,(6)
100	$\times$	1

Claro que a resposta a esta questão é não, uma vez que há uma infinidade de números positivos cujo produto é 100.

Se a largura do retângulo for, l e o comprimento, c, então a expressão analítica que traduz esta situação é:

$$l \times c = 100 \Leftrightarrow c = \frac{100}{l}$$

Largura		Comprimento
1	$\times$	100
2	$\times$	50
3	$\times$	$\frac{100}{3}$
4	$\times$	25
6	$\times$	16,(6)
100	$\times$	1

x	l	1	2	3	4	6	…	100
y	c	100	50	$\frac{100}{3}$	25	16,(6)		1

A tabela representa uma função porque a cada valor de x corresponde um e um só valor de y.

Esta função é de **proporcionalidade inversa** porque o produto das duas variáveis (largura e comprimento) é constante.

$$l \times c = 100 \Leftrightarrow c = \frac{100}{l}$$

Se representarmos l por x e o comprimento, c, por y podemos escrever:

$$x \times y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$$

Recorda:

x- é a variável independente
e
y - é a variável dependente

$$y=\frac{100}{x}$$

y depende do valor de x

É a expressão algébrica ou analítica da função de proporcionalidade inversa que a x faz corresponder $y=\frac{100}{x}$

A expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa é do tipo:

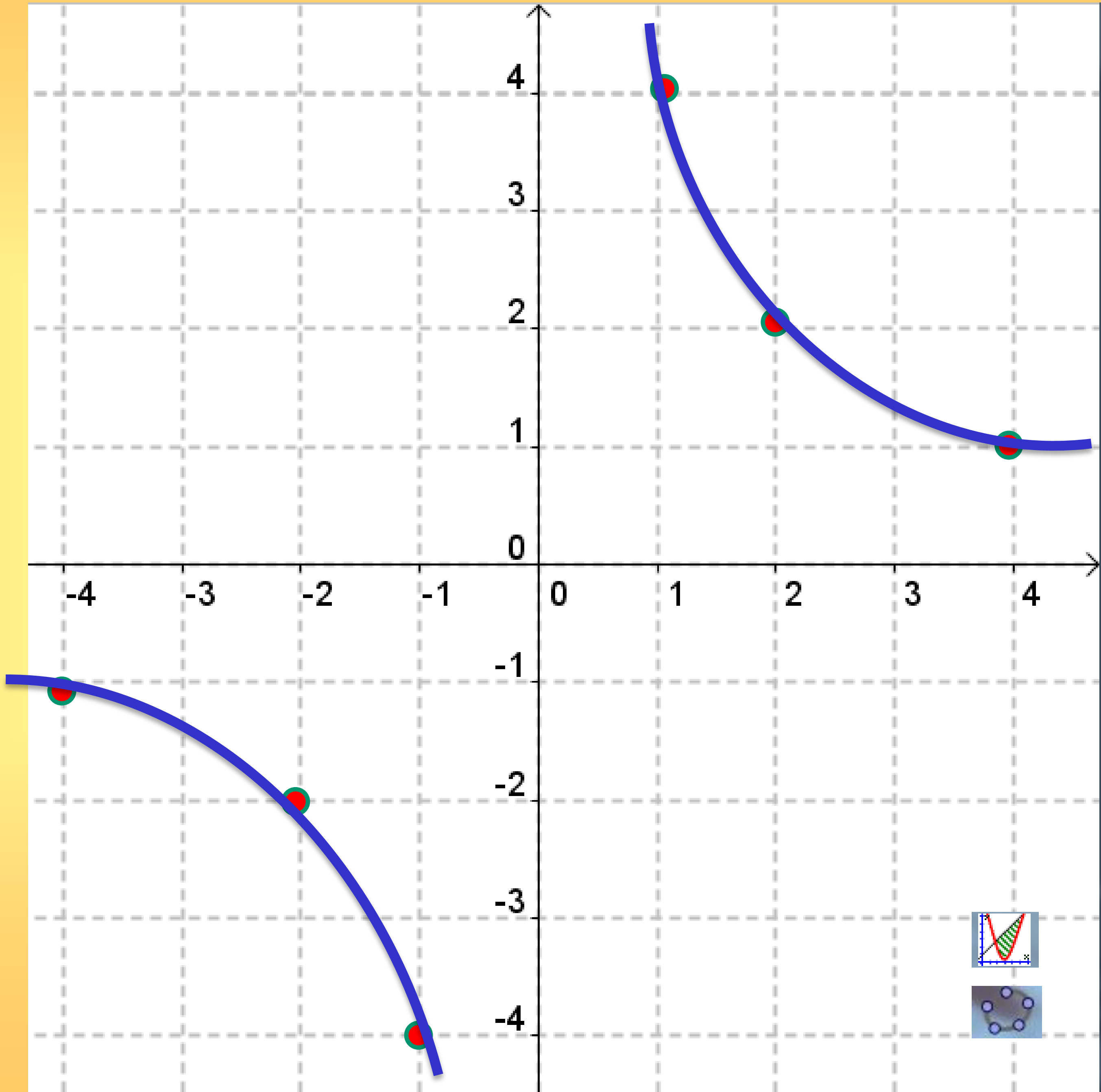
$y=\frac{k}{x}$, em que k é a constante de proporcionalidade, $k \neq 0$.

$$y=\frac{k}{x} \quad ou \quad f(x)=\frac{k}{x}, \quad k \neq 0 \; e \; x \neq 0$$

Representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa.

$$f(x)=\frac{4}{x}$$

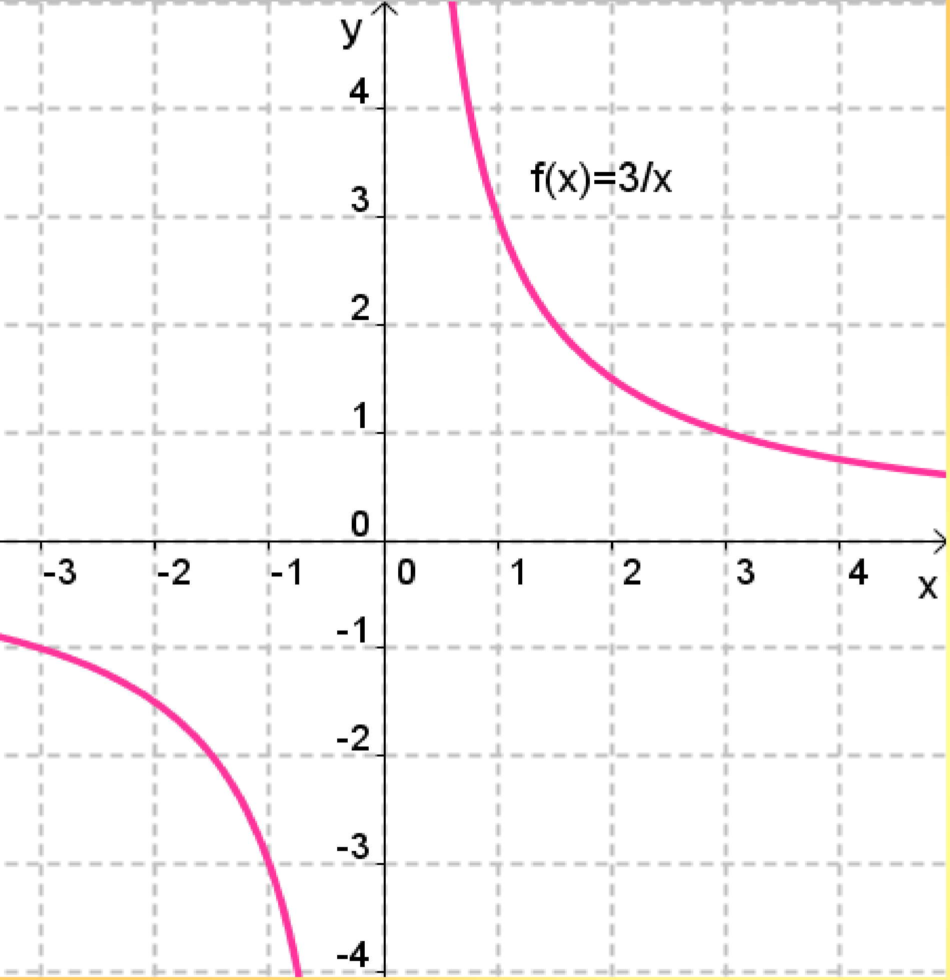
x	$y=\frac{4}{x}$
1	4
2	2
4	1
-1	-4
-2	-2
-4	-1



O gráfico de uma função de PI nunca interseta (corta) os eixos.

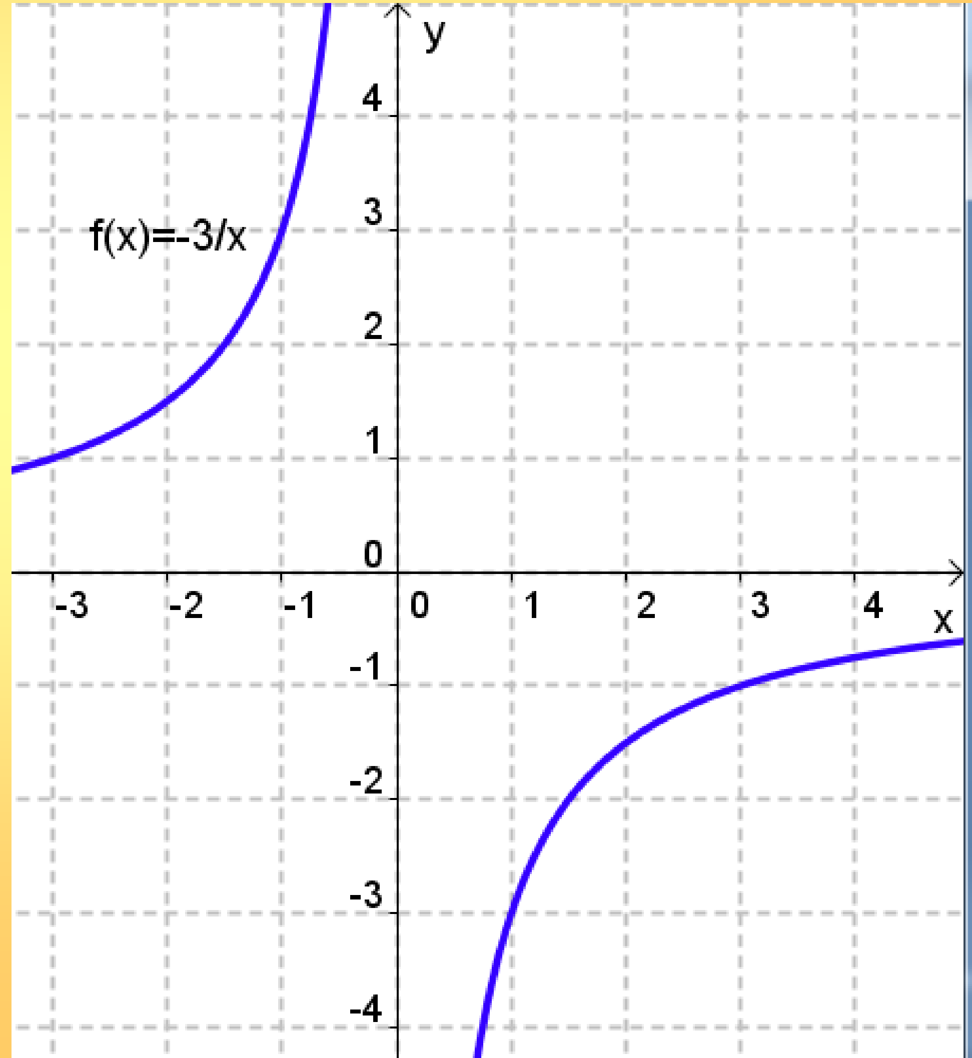
O gráfico de uma função do tipo $y = \frac{k}{x}$ é uma curva (constituída por dois ramos) denominada **hipérbole.**

O produto das coordenadas de qualquer ponto do gráfico é constante e igual a k.



Se $k > 0$

Os ramos da hipérbole estão no 1.° e 3.° quadrantes.



Se $k < 0$

Os ramos da hipérbole estão no 2.° e 4.° quadrantes.

P. Direta

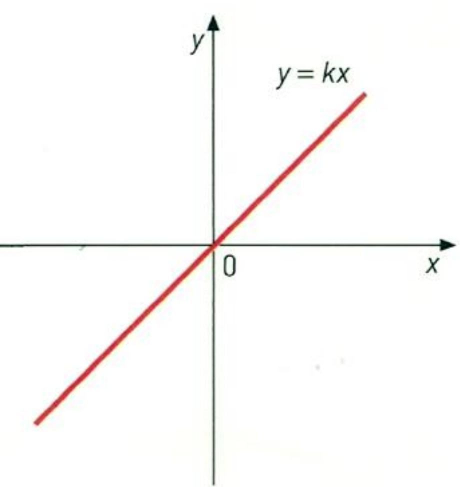
Duas variáveis x e y são D.P. sse:

$$\frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = kx$$

x	1	2	3	4
y	12	24	36	48

$\times 12$

$$\frac{y}{x} = 12$$



O gráfico de uma função de PD é uma **reta que passa na origem**.

P. Inversa

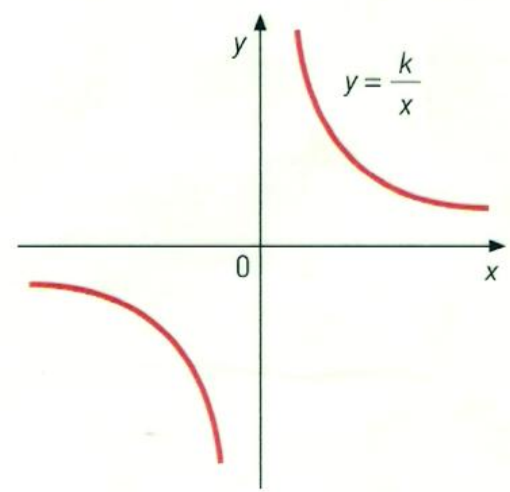
Duas variáveis x e y são I.P. sse:

$$xy = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$$

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

$$xy = 12$$

O gráfico de uma função de PI é uma curva chamada **hipérbole.**



P. Direta	P. Inversa
$\dfrac{y}{x} = k$	$xy = k$
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
$y = kx$	$y = \dfrac{k}{x}$
Reta que passa na origem.	Curva cujo nome é hipérbole.

Exercícios:

1. Uma obra foi feita por 60 operários em 18 dias. Se trabalharem ao mesmo ritmo, quantos dias demoram 9 operários a fazerem a mesma obra?

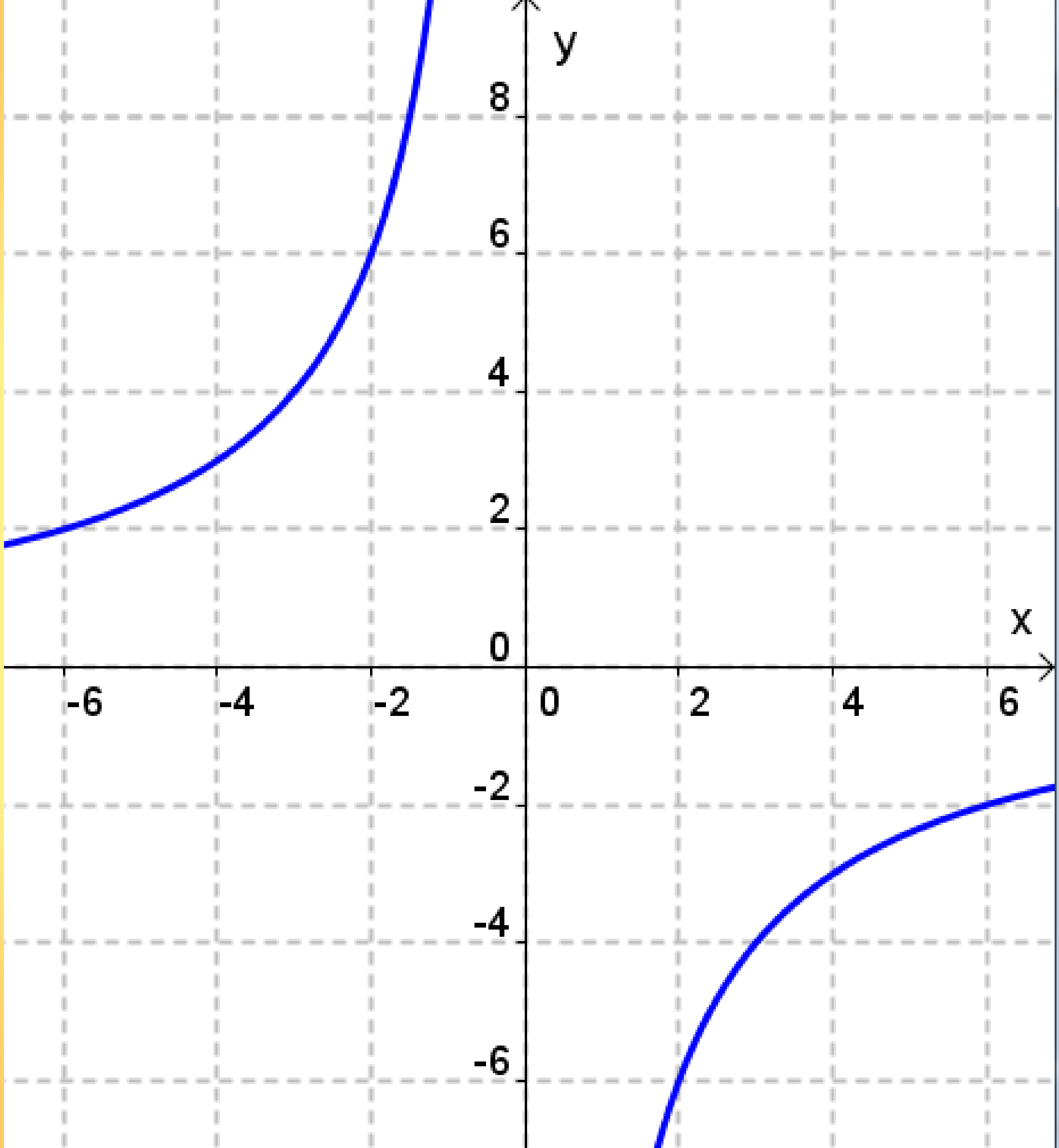
120 dias

2. Um livro tem 300 páginas e cada página tem 24 linhas. Quantas linhas deverá ter cada página do mesmo livro se for reeditado apenas com 240 páginas?

30 linhas

3. Escreve a expressão analítica da função representada.

Num gráfico de proporcionalidade inversa todos os pontos estão sobre uma linha curva composta por dois ramos chamada hipérbole.



Caderno da atividades página 35

Considera as duas tabelas seguintes. Numa delas as grandezas são diretamente proporcionais e na outra as grandezas são inversamente proporcionais. Completa as tabelas e indica a constante de proporcionalidade e qual o seu significado em cada caso.

1.1 Número de quilos de maças e o seu custo.

Número de quilos de maças	1	5	7	
Custo (euros)			6,3	10,8

1.2 Nº de litros de leite que se podem comprar com uma quantia fixa e o preço por litro.

Número de litros	24			10
Preço por litros (em euros)	0,50	0,6	1	

Exercício das páginas 60, 61, 62 e 63
TPC 7 PAG. 14 caderno atividades

Um tanque está cheio com 500 l de água. Para esvaziá-lo, abrimos uma torneira por onde saem 10 l de água por minuto.

a) Quantos litros de água, y, restam no tanque alguns minutos, x, depois de abrirmos a torneira.

b) Ao fim de 5 minutos quantos litros de água ainda restavam no tanque?

c) Elabora uma tabela de pares (x,y), escolhendo valores para x e calculando y.

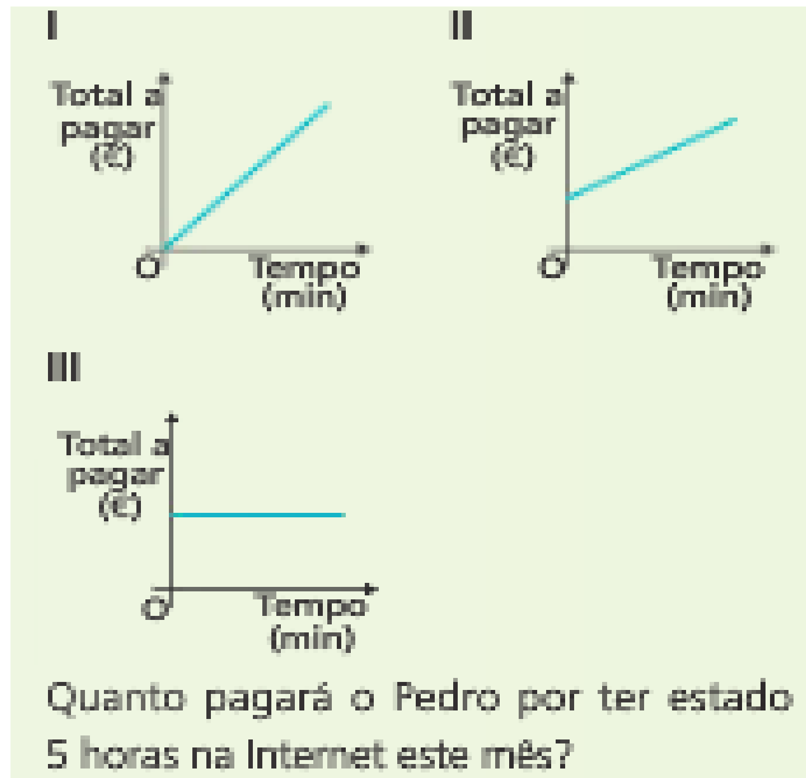
d) Representa graficamente esta situação.

e) Quanto tempo demora a esvaziar completamente o tanque?

Um operador de Internet utiliza a expressão seguinte para efetuar as cobranças aos seus clientes:

a) Se P é a quantia total (em euros) a ser paga ao fim do mês e t é o tempo (em min) em que o computador esteve ligado à Internet, descreve como é calculada a mensalidade por esse operador.

b) Qual dos seguintes gráficos pode representar esta forma de cobrança? Apresenta uma razão que te leve a rejeitar cada um dos outros dois.



Quanto pagará o Pedro por ter estado 5 horas na Internet este mês?

Expressão analítica!

x	0	1	2	3
y	100	125	150	175

$$y = 100 + 25x$$

x	0	1	2	3
y	50	48	46	44

$$y = 50 - 2x$$

X	0	1	2	3
y	-100	-96	-92	-88

$$y = -100 + 4x$$

X	0	2	4	6
y	30	30,4	30,8	31,2

$$y = 30 + 0{,}2x$$

Flipchart

RELAÇÃO ENTRE AS REPRESENTAÇÕES GRÁFICA E ALGÉBRICA DE UMA FUNÇÃO

Função de proporcionalidade inversa

Descobre a expressão analítica da função representada.

Representa no mesmo referencial as funções seguintes:

$$y = 3x - 2$$

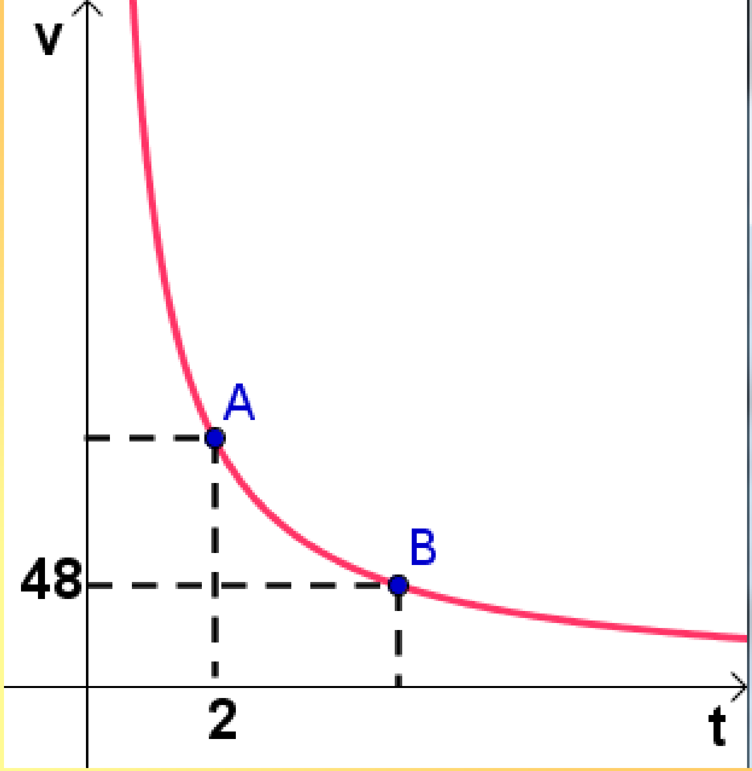
$$y = \frac{3}{2}x$$

$$y = -1$$

EXERCÍCIOS DA PÁGINA 70 E 71

FIM

d) No referencial da figura está representada a função que relaciona o tempo gasto no percurso de ida, em horas, com v, velocidade média, em quilómetros por hora.



d1) Escreve uma expressão algébrica que represente v em função de t.

d2) O ponto A tem abcissa 2 e pertence ao gráfico da função. Determina a ordenada de A.

d3) O ponto B tem ordenada 48 e pertence ao gráfico da função. Determina a abcissa do ponto B.

e) O ponto C tem de coordenadas (4,5; 40). Mostra que o ponto C pertence ao gráfico da função e apresenta o significado das coordenadas neste contexto.

BELMIRO 51

Exercício:

3. Um distribuidor de fruta faz várias viagens de ida e volta, desde o local de produção até à central de armazenamento, parando apenas para descarregar a mercadoria.

Numa das viagens, deslocou-se à velocidade média de 60 km/h e gastou 3 horas.

a) Qual é distância entre o local de produção e a central de armazenamento?

b) Em relação à última viagem de ida e volta, sabe-se que:

- a viagem de ida foi feita em 4 horas;
- no regresso a viagem foi feita à velocidade média de 80 km/h.

Determina qual foi a velocidade média no total da viagem de ida e volta.