

Introdução à Teoria das Probabilidades

No quotidiano é frequente ouvirmos expressões tais como “improvável”, “por sorte” ou “por acaso” que deixam bem claro que, em muitos acontecimentos das nossas vidas, não nos é possível saber, antecipadamente, qual é o seu desfecho.

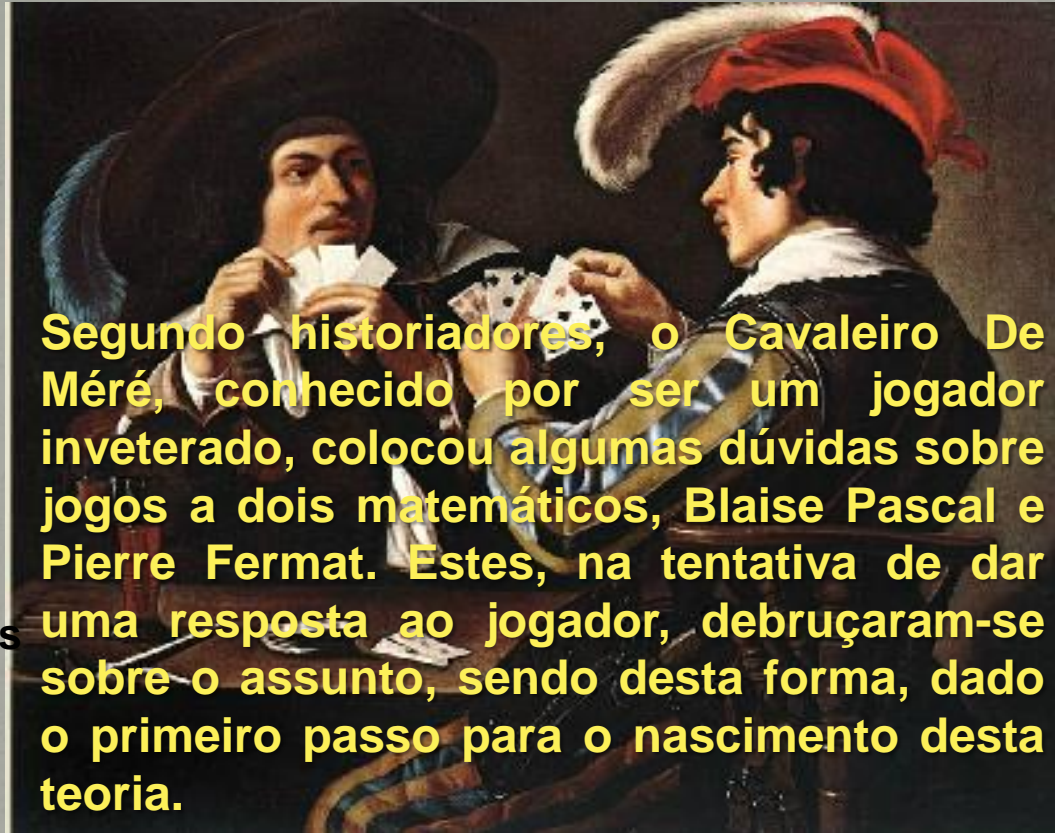
Incapazes de controlar o acaso, conseguimos, contudo, ter a noção da probabilidade de uma situação ocorrer ou não:

- ▶ embora nunca possamos com segurança dizer “Amanhã vai chover”, sabemos que a probabilidade de isso acontecer é maior no Inverno do que no Verão;
- ▶ é certo que ouviremos falar Inglês se formos a Inglaterra, enquanto que em Portugal isso será improvável, mas não impossível;
- ▶ é mais provável encontrar um atleta num ginásio do que numa discoteca.

Foi exatamente a partir dos “jogos de azar” que no século XVII surge um ramo da Matemática, que mais tarde se viria a chamar **Teoria das Probabilidades**.



Pierre Fermat
Matemático Francês
(1601-1665)



Segundo historiadores, o Cavaleiro De Méré, conhecido por ser um jogador inveterado, colocou algumas dúvidas sobre jogos a dois matemáticos, Blaise Pascal e Pierre Fermat. Estes, na tentativa de dar uma resposta ao jogador, debruçaram-se sobre o assunto, sendo desta forma, dado o primeiro passo para o nascimento desta teoria.



Blaise Pascal
Matemático Francês
(1623-1662)

As probabilidades surgem, assim, como forma de quantificar o grau de incerteza de um determinado acontecimento.

Embora o seu nascimento esteja ligado ao jogo, as Probabilidades têm, nos nossos dias, aplicações em muitas outras ciências, nomeadamente, na Economia, na Psicologia, na Medicina e até na Física e na Química. Uma área onde a Teoria das Probabilidades é muito utilizada é a dos seguros. Hoje, quando fazemos um contrato com uma companhia de seguros (seja esse contrato um seguro de vida, um seguro de incêndios, um seguro automóvel ou qualquer outro), o “prémio” a pagar à companhia é determinado em função da maior ou menor probabilidade de se verificar um acidente. Por exemplo, num seguro automóvel, o “prémio” que se paga:

- é mais caro para carros com mais de 5 anos, já que a probabilidade de se ter um desastre com um carro já com algum desgaste é maior do que com um carro novo;

- é mais caro se o condutor tiver carta de condução há menos de dois anos (a sua inexperiência torna maior a probabilidade do acidente).

Existem até companhias de seguros que fazem descontos para as mulheres condutoras!...

Noção de

☞ fenômeno aleatório e
fenômeno determinístico

e de

☞ experiência aleatória e
experiência determinista

Considera os seguintes fenómenos (situações):

Será que em todos estes fenómenos conseguimos prever o resultado?

A- "O peso do próximo bebé a nascer em Portugal."

B - "O número de peças produzidas por uma máquina na hora seguinte, Sabendo que produz 3 peças por minuto."

C- "Na sala de aula lançar uma moeda ao ar para verificar se cai."

D- "Tirar duas cartas à sorte de um baralho de 40 que foi previamente baralhado."

E- "Dado um teste, numa turma com 100% de assiduidade, o nº de testes que o professor vai corrigir."

F - "No início de um jogo de futebol, saber o tempo de "compensação" que vai ter."

		Antes da realização do fenómeno		A	B
		Há incerteza quanto ao resultado	É possível determinar o resultado	C	D
Fenómenos				E	F

Da atividade efetivada destacam-se dois tipos de fenômenos:

- Aqueles em que há incerteza quanto ao resultado (fenômenos aleatórios)
- Aqueles em que é possível determinar o resultado (fenômenos determinísticos)

Fenômenos aleatórios- são fenômenos observáveis em que o resultado de cada realização individual é incerto, mesmo que possa haver uma tendência.

Fenômenos determinísticos- são fenômenos observáveis cujos resultados podem ser determinados antes que os mesmos se realizem.

Experiências aleatórias- é a realização de um fenômeno aleatório e a observação dos resultados. É uma experiência em que não é possível prever o resultado que se obtém, mesmo quando repetida exatamente nas mesmas condições.

Experiências deterministas- é aquela que se conhece o resultado antes da sua realização.

Experiências

Aleatórias

- Lançar uma moeda ao ar e registrar a face que fica voltada para cima;
- Numa escola, escolher um aluno ao acaso e aferir se tem o boletim de vacinas atualizado;
- Verificar se sai o número 7 na próxima extração do totoloto;
- Extração de uma carta de copas de um baralho de cartas completo.

À partida não sabemos o resultado

Deterministas

- Furar um balão cheio e verificar o que acontece
- Deixar cair um prego num copo de água
- Tirar à sorte uma bola verde de um saco que contem apenas bolas verdes e verificar a cor que sai.

À partida já conhecemos o resultado

Quando se realiza uma experiência aleatória, podem indicar-se os resultados possíveis, mas não se sabe qual deles vai ocorrer.

A teoria das probabilidades ocupa-se das leis que regem os fenômenos cujo resultado dependem do acaso.

Por isso, só as **experiências aleatórias** interessam ao estudo das probabilidades.

Curiosidade: A palavra aleatória deriva da palavra latina *alea* que significa sorte, azar, risco ou acaso.
«*Alea jacta est.*»- a sorte está lançada.

Termos e conceitos



Espaço de resultados ou Espaço Amostral

Consideremos a experiência seguinte.

“No lançamento de um dado perfeito com as faces numeradas de 1 a 6, registrar qual a face que fica voltada para cima.”

À partida já sabemos quais as opções que podemos obter -
faces: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Então, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

é o espaço de resultados ou o espaço amostral desta experiência.

Esta experiência tem **6 resultados possíveis ou 6 casos possíveis.**

Definição:

Espaço amostral ou espaço de resultados - é o conjunto dos resultados possíveis (casos possíveis) associados a uma experiência aleatória. Representa-se por E , S ou Ω .

$$\Omega = E = S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Para cada uma das seguintes experiências aleatórias escreve o espaço de resultados.

EXPERIÊNCIA 1:

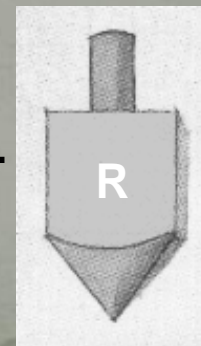
Extrair uma bola de um saco com 10 bolas numeradas de 0 a 9.

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$$

EXPERIÊNCIA 2:

Lançamento de um rapa e verificar qual a face que fica voltada para cima.

$$\Omega = \{\text{rapa, tira, deixa, põe}\}$$



EXPERIÊNCIA 3:

Escolher ao acaso dois alunos de um grupo de cinco rapazes e 6 raparigas e contar quantos são os rapazes.

$$S = \{0, 1, 2\}$$

**Resolver os
exercícios
1 e 2 da página 12.**

Acontecimentos

Com o espaço amostral, podem formar-se acontecimentos.

Alguns acontecimentos que se podem formar com a experiência:

Lançamento de um dado perfeito e registar o número da face que fica voltada para cima.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por exemplo:

Quantos casos favoráveis ou resultados favoráveis há para cada um dos acontecimentos?

A: «Sair face 6.»	$A = \{6\}$		1 caso
B: «Sair face 3 e face 4.»	$B = \{ \}$	$B = \emptyset$	0 casos
C: «Sair face com um número ímpar.»	$C = \{1, 3, 5\}$		3 casos
D: «Sair face com um número menor que três.»	$D = \{1, 2\}$		2 casos
E: «Sair um divisor de 6.»	$E = \{1, 2, 3, 6\}$		4 casos
F: «Sair face com um número ímpar ou par.»	$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$		6 casos

Como podemos observar todos os elementos de cada um dos acontecimentos vistos estão contidos em S . Deste modo cada um deles é um subconjunto do conjunto S . Por exemplo $A \subset S$.

Então, podemos concluir que:

Acontecimento - é qualquer subconjunto do espaço amostral de uma experiência aleatória, isto é, um conjunto contido no espaço de resultados.

Dá exemplo de um acontecimento na realização da seguinte experiência aleatória:

“Extração de uma bola de um saco, que contém: 5 bolas vermelhas, 2 brancas e 3 azuis.”

CLASSIFICAÇÃO DOS ACONTECIMENTOS

Tendo em conta os 6 acontecimentos anteriores, relativos à experiência "Lançamento de um dado perfeito", podemos por exemplo dizer:

A: «Sair face 6.» $A = \{6\}$

•O acontecimento A é um acontecimento elementar.

C: «Sair face com um número ímpar.» $C = \{1, 3, 5\}$

•O acontecimento C é um acontecimento composto.

B: «Sair face 3 e face 4.» $B = \{\}$

•O acontecimento B é um acontecimento impossível.

F: «Sair face com um número ímpar ou par.» $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

•O acontecimento F é um acontecimento certo.

D: «Sair face com um número menor que três.»

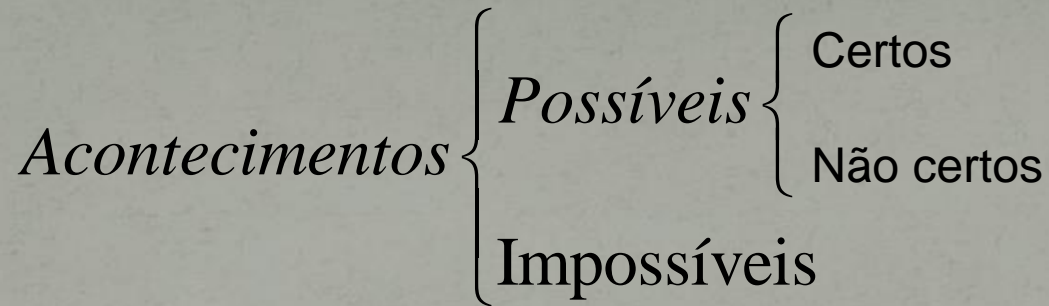
$$D = \{1, 2\}$$

E: «Sair um divisor de 6.»

$$E = \{1, 2, 3, 6\}$$

Os acontecimentos D e E são acontecimentos possíveis mas não certos.

Conclusões:



Os acontecimentos podem ser

Elementares - constituído apenas por um elemento do espaço amostral (constituído por um resultado favorável).

Compostos - é composto por mais do que um elemento do espaço amostral (tem mais do que um caso favorável).

Impossíveis- não tem qualquer elemento do espaço amostral (nunca ocorre, tem 0 casos favoráveis).

Certos- é composto por todos os elementos do espaço amostral (ocorre sempre, coincide com S).

Um baralho de 52 cartas tem 4 naipes. Cada naipe é constituído por 13 cartas (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, dama, valete, rei e ás). De um baralho de 52 cartas, extrai-se uma carta, ao acaso, e identifica-se a carta.



- a) Justifica que se trata de um experiência aleatória.
- b) Indica o número de casos possíveis.
- c) Determina o número de resultados favoráveis aos acontecimentos seguintes:
 - 1) A: “extrair uma carta vermelha”
 - 2) B: “Tirar um rei”;
 - 3) C: “Sair uma figura”
 - 4) D: “Extrair a dama de copas ou um 10”;
 - 5) E: “Não sair um ás”
- d) Em relação a esta experiência, dá um exemplo de:
 - 1) um acontecimento que tenha oito casos favoráveis;
 - 2) Um acontecimento impossível.

**Efetuar a atividade de
aplicação 2 da página16.**

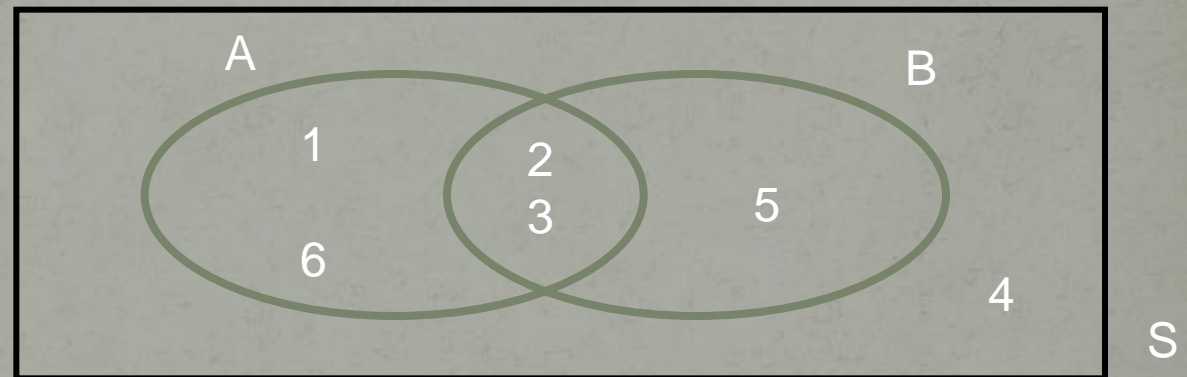
Operações com acontecimentos

Reunião (ou união) e interseção de acontecimentos

Experiência: “Lançamento de um dado e verificar a face que fica voltada para cima. ”

Acontecimentos: A: «Sair um divisor de 6» $A=\{1, 2, 3, 6\}$
B: «Sair um número primo» $B=\{2, 3, 5\}$

Diagrama de Venn:



← Reunião de acontecimentos

O acontecimento reunião de A com B, representa-se por $A \cup B$

$A \cup B$: “Sair um divisor de 6 **ou** um número primo”

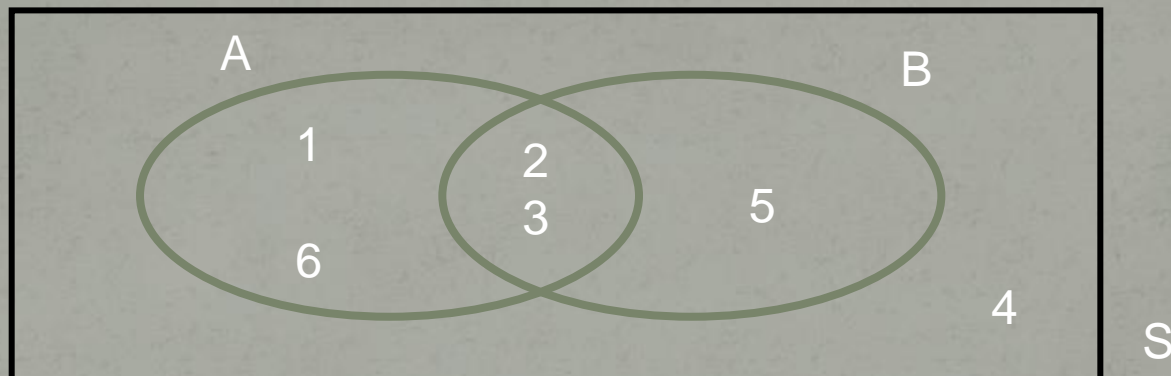
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\} \quad \text{Lê-se: “A ou B”}$$

É o acontecimento constituído por todos os resultados de A e por todos os resultados de B. O acontecimento $A \cup B$ realiza-se quando pelo menos um dos acontecimentos A ou B, se realiza.



A: «Sair um divisor de 6» $A = \{1, 2, 3, 6\}$

B: «Sair um número primo» $B = \{2, 3, 5\}$

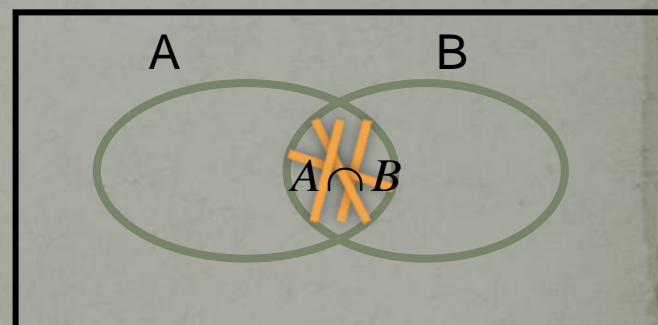


Interseção de acontecimentos

$A \cap B$: “Sair um divisor de 6 e um número primo”

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

Lê-se: “A e B”



O acontecimento interseção de A e B é constituído pelos resultados que pertencem simultaneamente a A e a B.

← Acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos ou incompatíveis

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Experiência: “Lançamento de um dado”

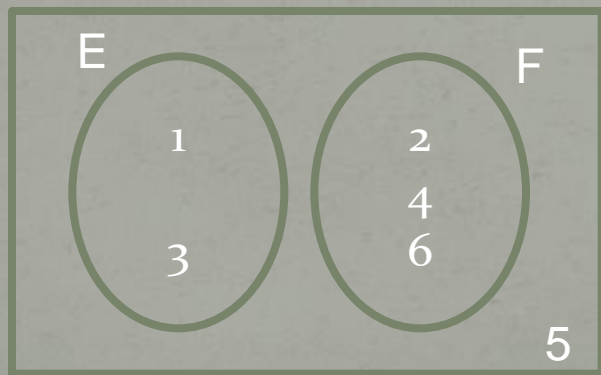
Acontecimentos: E: «Sair um divisor de 3» $E = \{1, 3\}$

F: «Sair um número par» $F = \{2, 4, 6\}$

Os acontecimentos E e F são disjuntos, porque não podem ocorrer em simultâneo, isto é, $E \cap F = \emptyset$.



Acontecimento
Impossível

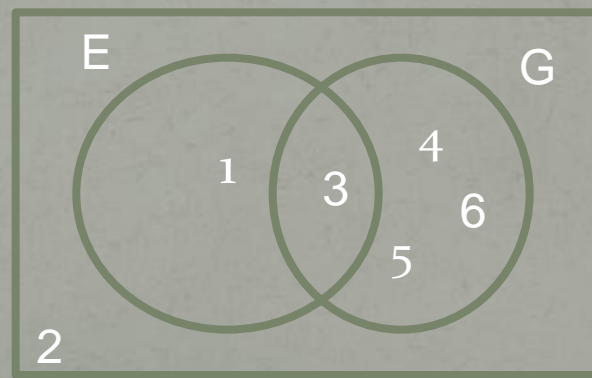


Acontecimentos incompatíveis

$$E \cap F = \emptyset$$

G: «Sair um n° maior que 2»

$G = \{3, 4, 5, 6\}$ $E \cap G = \{3\}$



Acontecimentos compatíveis

$$E \cap G \neq \emptyset$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

← Acontecimentos complementares (ou contrários)

Considera o acontecimento:

A: «Sair um divisor de 6» $A = \{1, 2, 3, 6\}$

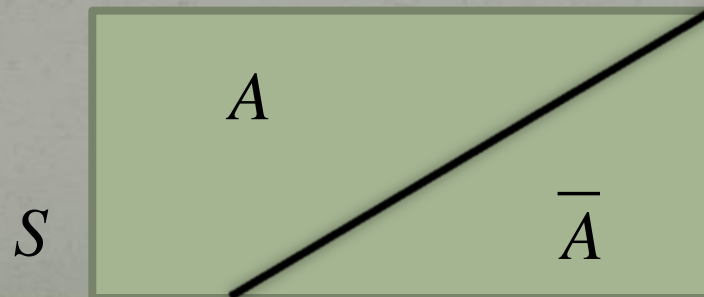
O acontecimento complementar de A é $\bar{A} = \{4, 5\}$

\bar{A} : «Não sair um divisor de 6»

O acontecimento complementar do acontecimento A é o constituído por todos os resultados do espaço amostral, E, que não pertencem a A. O complementar do acontecimento A representa-se por \bar{A} .

O complementar do acontecimento certo é o acontecimento impossível. $\bar{S} = \{ \}$

O complementar do acontecimento impossível é o acontecimento certo. $\overline{\{ \}} = S$



$$\bar{A} \cap A = \emptyset$$

$$\bar{A} \cup A = S$$

Observação:

Se dois acontecimentos são complementares ou contrários, então são acontecimentos incompatíveis.

No entanto dois acontecimentos podem ser incompatíveis e não serem complementares.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{ \}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{1, 2\}$$

$$C = \{4, 5\}$$

$$A \cap C = \{ \}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$$

A e B são complementares logo são incompatíveis

A e C são incompatíveis mas não são complementares

Exercícios:

1. Um baralho de 52 cartas tem 4 naipes. Cada naipe é constituído por 13 cartas (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, dama, valete, rei e ás). De um baralho de 52 cartas, extrai-se uma carta, ao acaso, e identifica-se a carta.



Em relação a esta experiência, dá um exemplo de:

- a) Dois acontecimentos disjuntos;
- b) Dois acontecimentos complementares.

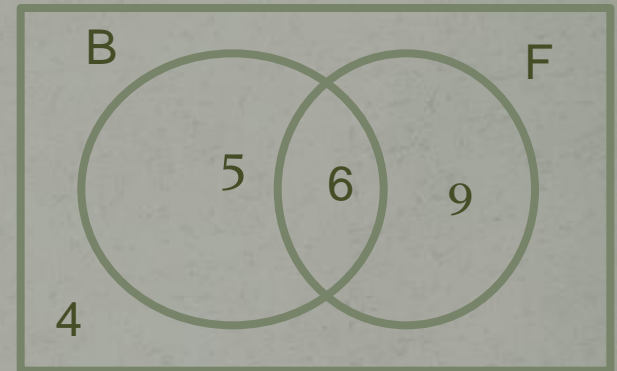
2.1) Selecionou-se, aleatoriamente, uma turma e registou-se o desporto praticado pelos alunos que a compõem. Em relação à experiência aleatória referida, sejam B e F os acontecimentos definidos por:

B: “Pratica basquetebol”

F: “Pratica futebol”

Com os dados obtidos elaborou-se o seguinte diagrama de Venn:

Escreve um texto que traduza os resultados obtidos na referida experiência.



Num total de 24 alunos, 6 alunos praticam ambas as modalidades, 4 não praticam qualquer uma das modalidades, 11 praticam basquetebol e 15 praticam futebol. 5 praticam apenas basquetebol e 9 praticam somente futebol.

2.2) Indica o número de elementos do acontecimento:

a) $B \cap F$ b) $B \cup F$ c) \bar{B} d) \bar{F} e) $B \cap \bar{F}$ f) $\bar{B} \cap F$

g) $\bar{B} \cap \bar{F}$

3. Considera a experiência aleatória que consiste em rodar um pião, numerado de 1 a 5 e registrar o número que sai.

Considera os acontecimentos:

A: "Sair nº par";

B: "Sair quadrado perfeito";

C: "Sair nº primo".

Escreve:

$$A \cap B$$

$$A \cap C$$

$$B \cap C$$

$$\bar{A} \cup B$$

$$\bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B}$$

4. Comenta as afirmações seguintes:

a) Abrir um livro ao acaso, adicionar os números das duas páginas e observar se o resultado é par ou ímpar é uma experiência determinista.

b) Num lançamento de um dado, numerado de 1 a 6, os acontecimentos $A=\{1, 2, 3, 4\}$ e $B=\{4, 5, 6\}$ são complementares.

c) Dois acontecimentos disjuntos são necessariamente complementares.

**Resolver os
exercícios
da página 17**

**Conceito clássico
de probabilidade-
Lei de Laplace**

ACONTECIMENTOS EQUIPROVÁVEIS

Já vimos que o cálculo de probabilidades procura medir até que ponto se pode esperar que ocorra um acontecimento.

Consideremos a seguinte experiência:

“No lançamento de um dado perfeito (ou equilibrado) anotar a face que fica voltada para cima.”

Observação:

“Um dado considera-se **perfeito ou equilibrado** se, ao ser lançado, as suas faces têm a mesma probabilidade de saírem, isto é, a probabilidade de ocorrer cada uma das faces é igual.

$$P(\text{face } 1) = P(\text{face } 2) = P(\text{face } 3) = P(\text{face } 4) = P(\text{face } 5) = P(\text{face } 6)$$

Definição: Dois acontecimentos que têm a mesma probabilidade de ocorrerem, dizem-se acontecimentos **equiprováveis**.



A roda da sorte da figura tem apenas duas cores e encontra-se dividida em 8 setores do mesmo tamanho, cada um com igual probabilidade de ocorrer.

Se rodarmos a roda da sorte, pode ocorrer cor vermelha ou cor amarela.

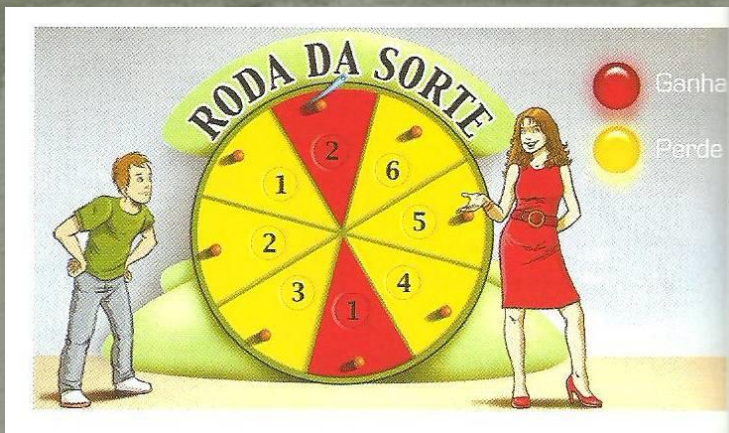
Um espaço amostral possível para descrever esta experiência aleatória é:

$$S=\{\text{amarelo, vermelho}\}$$

Consideremos os acontecimentos elementares A : "Sair amarelo" e V : "Sair vermelho".

Serão estes acontecimentos equiprováveis?

Obviamente que não, uma vez que há mais setores de cor amarela do que de cor vermelha.



Como a roda da sorte está dividida em 8 setores do mesmo tamanho; 6 amarelos e 2 vermelhos, podemos distinguir os setores, por exemplo:

Os amarelos: A1, A2, A3, A4, A5 e A6 , os vermelhos V1, V2.

Assim, podemos pensar num outro espaço de resultados:

$$S=\{A1, A2, A3, A4, A5, A6, V1, V2\}$$

Serão estes 8 acontecimentos elementares equiprováveis?

Claro, visto que qualquer um dos acontecimentos elementares têm a mesma probabilidade de saírem, uma vez que os setores são congruentes.

Ora, quando os acontecimentos elementares de uma determinada experiência são equiprováveis é possível determinar a probabilidade de um acontecimento sem necessitarmos de recorrer à experiência (à priori).

Lei de LAPLACE

Matemático e astrónomo francês



1749 – 1827

Enunciou pela 1ª vez a definição clássica de probabilidade

Consideremos os acontecimentos relativos à experiência do lançamento de um dado perfeito.

A: "sair face 5." B: "sair face par." C: "sair face maior ou igual a 3."

Antes de calcularmos a probabilidade destes acontecimentos, temos de conhecer duas situações:

1.^a

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ O número de casos possíveis, 6.

2.^a A outra situação, são os casos favoráveis, que variam de acordo com cada acontecimento.

A: "sair face 5." $A = \{5\}$

$$P(A) = \frac{1}{6} \approx 17\%$$

Neste caso, só existe 1 caso favorável à ocorrência do acontecimento.

B: "sair face par."

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

C: "sair face maior ou igual a 3."

$$P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 67\%$$

Conceito clássico de probabilidade

Definição: Regra de Laplace

A probabilidade de um acontecimento A , $P(A)$, é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento A e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}}$$

Nota importante: Só é possível aplicar esta regra quando todos os acontecimentos elementares de S de uma experiência aleatória forem equiprováveis e em número finito.

A probabilidade de um acontecimento é um número que pode apresentar-se sob a forma de fração (irredutível), dízima ou percentagem.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(A) = 0,5 \quad P(A) = 50\%$$

Qual é a probabilidade de cada um destes acontecimentos elementares?

A: "sair face 1"; B: "sair face 2"; C: "sair face 3";
D: "sair face 4"; E: "sair face 5"; F: "sair face 6"

$$P(\text{face 1}) = P(\text{face 2}) = P(\text{face 3}) = P(\text{face 4}) = P(\text{face 5}) = P(\text{face 6}) = \frac{1}{6}$$

Se o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória tem n resultados igualmente prováveis, isto é, os acontecimentos elementares são equiprováveis, então a probabilidade de cada um deles é $\frac{1}{n}$.

Exercício:

Um "rapa" tem 4 faces - rapa, R; tira, T; põe, P; deixa, D, todas com a mesma probabilidade de saírem num lançamento.

Ao lançar o "rapa", qual a probabilidade de:

a) sair R?

$$P(\text{"sair R"}) = \frac{1}{4}$$

b) Não sair R?

$$P(\text{"não sair R"}) = \frac{3}{4}$$

c) Sair R ou T?

$$P(\text{"sair R ou T"}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



Efetuar os exercícios das páginas 23, 24, 25, 26 e 27 do manual adotado.

Probabilidade de um acontecimento

A teoria das probabilidades é uma das ferramentas fundamentais da estatística e constitui um ramo da matemática que se ocupa do estudo de fenômenos aleatórios.

O cálculo das probabilidades procura medir (quantificar) até que ponto se pode esperar que um acontecimento ocorra; essa medida é a probabilidade de um acontecimento.

A probabilidade de um acontecimento A mede o grau de possibilidade do acontecimento se realizar. A probabilidade de um acontecimento A, designa-se por $P(A)$.

Um laboratório efetuou um estudo estatístico envolvendo um grande número de pessoas. Verificou que a frequência relativa das pessoas que, tendo tomado a vacina, não adoeceram foi de 0,7. Concluiu que a vacina é eficaz em 70% dos casos.

Por este motivo, a estatística e a teoria das probabilidades estão estreitamente ligadas.

Como vimos, a origem da teoria das probabilidades está intimamente associada ao jogo. Atualmente as suas aplicações ultrapassam largamente as questões relacionadas com os jogos de azar. A economia, a meteorologia, a medicina, a engenharia e as ciências em geral, **apoiam-se cada vez mais na estatística e na teoria das probabilidades para fazerem previsões e tomarem melhores decisões.**



Saúde

Vacina contra a gripe foi testada e mostra-se eficaz em 70% dos casos.



Probabilidade empírica (ou frequentista) de um acontecimento

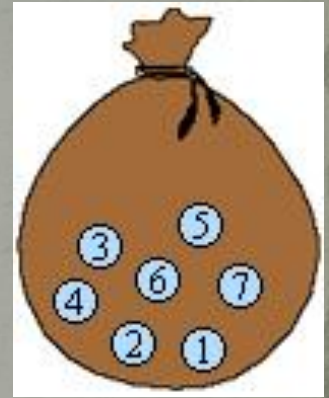
Com a ajuda do Excel vamos simular a seguinte experiência aleatória:

Num saco estão 7 bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 7. Consideremos a experiência que consiste em retirar aleatoriamente uma bola do saco e registar o número saído, repondo de seguida a bola.

Pretende-se numa primeira fase repetir esta experiência 70 vezes e ir aumentando significativamente o número de repetições desta experiência.

Podemos observar que, à medida que o número de repetições da experiência aumenta a frequência relativa tende a estabilizar em torno de um certo valor, valor esse que se adota como sendo a probabilidade desse acontecimento.

$$P(A) \approx \text{Frequência relativa de } A$$



Nota: O saco tem 7 bolas indistinguíveis ao tato. **Assim em 70 lançamentos é de esperar que todas as bolas saiam mais ou menos o mesmo número de vezes.**

Com um baralho de 40 cartas realizou-se a seguinte experiência:

«Tirou-se uma carta à sorte e registou-se o naipe que saiu. Repôs-se a carta no baralho e extraiu-se outra ao acaso, repetindo o processo 100 vezes.»

Resultados da experiência acima referida:

Naipes	Frequência absoluta	Frequência Relativa
Paus	22	$22/100=0,22$
Ouros	30	0,3
Copas	27	0,27
Espadas	21	0,21
Total	100	1

A probabilidade de cada naipe é de 0,25 = 25%.

Continuando a experiência repetindo o processo 1000 vezes, obtiveram-se os seguintes resultados:

Naipes	Frequência absoluta	Frequência Relativa
Paus	250	$250/1000=0,25$
Ouros	248	0,248
Copas	255	0,255
Espadas	247	0,247
Total	1000	1

O que observas?

Probabilidade frequencista (empírica ou experimental) de um acontecimento A é o valor para o qual tende a estabilizar a frequência relativa de A , quando se repete uma experiência aleatória um n^0 grande de vezes, nas mesmas condições. Representa-se por $P(A)$.

Esta definição de probabilidade é usada muitas vezes em experiências de interesse científico, em que as probabilidades são calculadas a posteriori, a partir das frequências relativas do acontecimento em estudo.

Nota:

Quanto maior for o número de vezes que a experiência é repetida, melhor será a estimativa obtida para a probabilidade.

Conclusão:

⇒ Se numa experiência aleatória **os resultados se preveem equiprováveis**, podemos determinar a probabilidade de um acontecimento, de duas formas:

- Previamente (a priori), aplicando a lei de Laplace - conceito clássico de probabilidade;
- Realizando a experiência, empiricamente (a posteriori), aplicando a Lei dos grandes números - conceito frequencista de probabilidade.

⇒ *Se os resultados não se preveem equiprováveis*, a única maneira de prever o comportamento do acontecimento é empiricamente, realizando a experiência (a posteriori) e aplicando a Lei dos grandes números.

1. Para verificar se era um dado equilibrado, isto é, se todas as suas faces tinham a mesma probabilidade de sair, lançou-se o dado 8453 vezes. Os resultados dos lançamentos estão organizados na tabela seguinte.

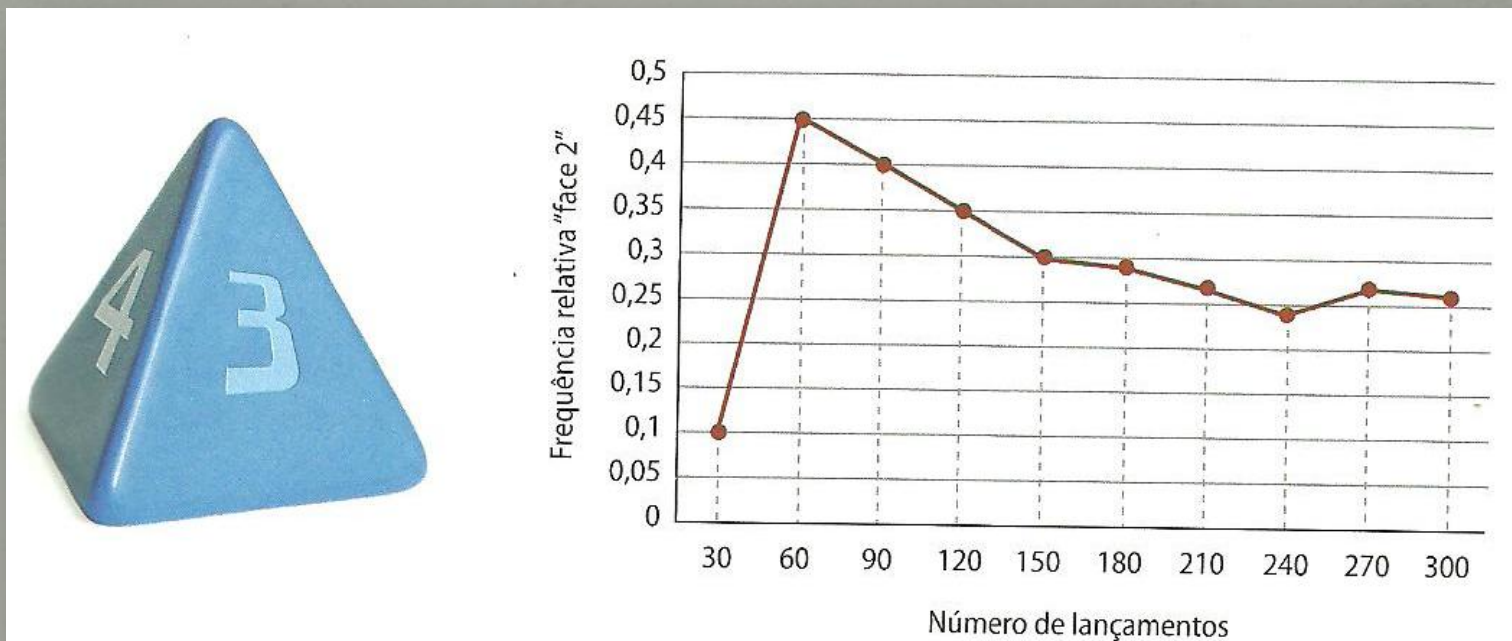
Face	n_i
1	1500
2	1695
3	1450
4	1687
5	523
6	1598

1.1 De acordo com os resultados da experiência, parece-te que o dado é ou não equilibrado? Explica a tua resposta.

1.2 Tendo em conta os resultados apresentados na tabela, estima a probabilidade de, lançando esse dado uma vez, sair face com um número ímpar. Apresenta todos os cálculos que efetuares e indica o resultado arredondado às unidades, na forma de percentagem.

2. O dado representado na figura tem a forma de uma pirâmide com 4 faces congruentes, todas elas triângulos equiláteros e numerados de 1 a 4.

A Rita efetuou 300 lançamentos deste dado e foi anotando o n.º de vezes em que a face 2 ficou voltada para baixo, isto ao fim de 30, 60, 90, 120, 150, ..., 300 lançamentos. Com esses valores, calculou as frequências relativas e obteve o gráfico seguinte.



Nos primeiros 120 lançamentos, quantas vezes a face 2 ficou voltada para baixo? Achas que o dado é perfeito? O dado privilegia algumas faces em relação às outras? Explica a tua resposta.

3. Podes concluir que uma moeda é viciada:

a) Se em 10 lançamentos obtiveres 9 vezes “face comum”?

b) E se em 10 000 lançamentos obtiveres 9 000 vezes “face comum”?

Justifica as respostas.

4. Experiência: Lançar um dado de madeira construído à mão. Será que o dado ficou equilibrado?

Nas tabelas seguintes estão registados os resultados obtidos numa experiência com o dado de madeira que o Francisco construiu.

Resultados de 1200
lançamentos

N.º da face	Freq. absol	Freq. relativa
1	310	0,258
2	355	0,296
3	160	0,133
4	150	
5	110	
6	115	
Total	1200	

Resultados de 5000
lançamentos

N.º da face	Freq. absol	Freq. relativa
1	1030	0,206
2	1480	0,296
3	730	
4	525	
5	485	
6	750	
Total	5000	

a) Completa as tabelas.

b) Indica a probabilidade (aproximada) de obter face 1 e de obter face 6. Qual a tabela que consultaste? Justifica.

c) Como se poderia melhorar ainda mais a aproximação?

d) Parece-te que o Francisco construiu um dado perfeito? Justifica.

Considera a experiência:

Extração de uma bola de um saco que contém 20 bolas vermelhas e brancas.

Realizou-se a experiência 1000 vezes e observou-se que 250 vezes saiu bola branca. Quantas bolas brancas tem o saco?

**Exercícios das
páginas 20 e 21**

Regras e Propriedades das probabilidades

Exercício:

Calcula a probabilidade de ocorrência dos acontecimentos A, B, C, D, E e F e assinala numa reta numérica os seus resultados.

A: "Tirar uma bola branca de um saco com 10 bolas azuis."

B: "Sair face europeia no lançamento de uma moeda equilibrada."

C: "Tirar um berlinde amarelo de um saco onde há 1 verde e 9 amarelos."

D: "Sair 1 no lançamento de um dado perfeito."

E: "Tirar uma bola azul de um saco com 10 bolas azuis."

F: "Extraír deste saco uma bola com um número inferior a oito."

$$P(A) = \frac{0}{10} = 0$$

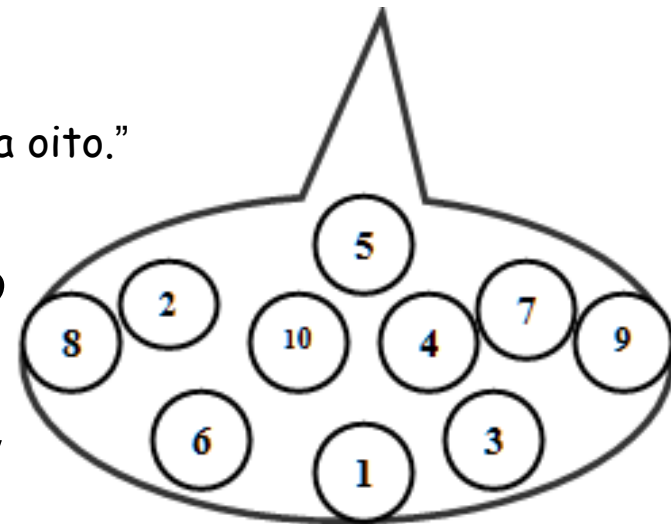
$$P(B) = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$P(C) = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$P(D) = \frac{1}{6} \approx 0,2$$

$$P(E) = \frac{10}{10} = 1$$

$$P(F) = \frac{7}{10} = 0,7$$

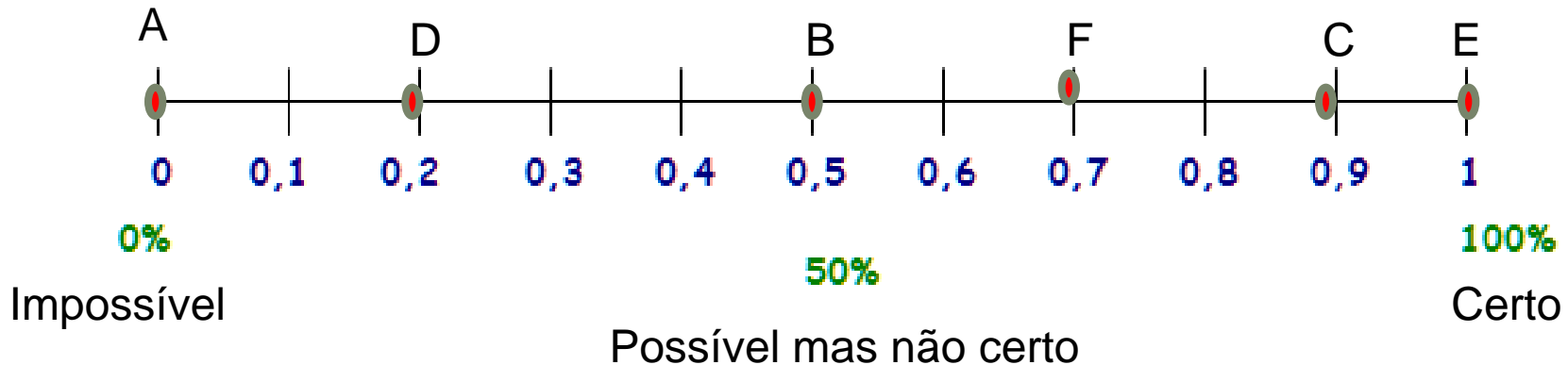


$$P(A) = \frac{0}{10} = 0 \quad P(B) = \frac{1}{2} = 0,5 \quad P(C) = \frac{9}{10} = 0,9 \quad P(D) = \frac{1}{6} \approx 0,2$$

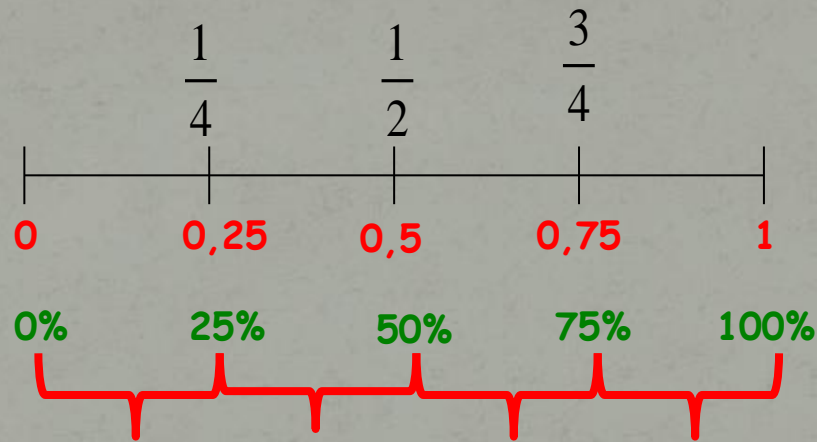
$$P(E) = \frac{10}{10} = 1 \quad P(F) = \frac{7}{10} = 0,7$$

➔ A probabilidade de um acontecimento Q é um número maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1.

$$0 \leq P(Q) \leq 1$$



$$0 < P(Q) < 1$$



Muito pouco
provável ou
improvável

Pouco
provável

Provável

Muito
provável

$$P(A) = \frac{0}{10} = 0 \quad P(B) = \frac{1}{2} = 0,5 \quad P(C) = \frac{9}{10} = 0,9 \quad P(D) = \frac{1}{6} \approx 0,2$$

$$P(E) = \frac{10}{10} = 1 \quad P(F) = \frac{7}{10} = 0,7$$

➡ A probabilidade de um acontecimento impossível é 0 ou 0%. $P = \frac{0}{c.p} = 0$

➡ A probabilidade de um acontecimento certo é 1 ou 100%.

Nº de casos favoráveis é igual ao nº de casos possíveis

- ➔ Numa experiência aleatória a probabilidade da união de dois acontecimentos disjuntos é igual à soma das suas probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ se } A \text{ e } B \text{ são } \mathbf{acontecimentos disjuntos}$$

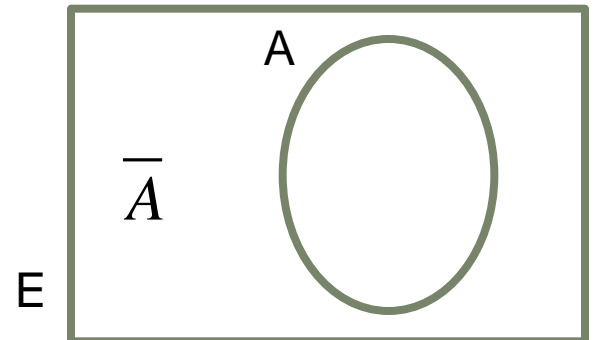
- ➔ A probabilidade da união de dois acontecimentos A e B é tal que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

se A e B são compatíveis ou não disjuntos

- ➔ A soma das probabilidades de dois acontecimentos complementares é 1.

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1 \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



Exemplo 1

Sejam A e B dois acontecimentos, disjuntos, de uma determinada experiência aleatória.

Sabe-se também que $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$.

De acordo com essas informações, calcula:

$$P(A)$$

$$\frac{1}{2}$$

$$P(\bar{B})$$

$$\frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B)$$

$$0$$

$$P(A \cup B)$$

$$\frac{3}{4}$$

$$P(\overline{A \cup B})$$

$$\frac{1}{4}$$

Exemplo II

Uma caixa contém bombons com três tipos de chocolate: chocolate branco, chocolate preto e chocolate de leite. A probabilidade de tirar, ao acaso, um bombom de chocolate preto é $\frac{1}{3}$ e a probabilidade de tirar um bombom de chocolate branco é 0,25. Na caixa há 15 bombons de chocolate de leite.

1. Mostra que na caixa há 36 bombons.
2. Qual é a probabilidade de retirar um bombom da caixa que:
 - a) não seja de chocolate de leite?
 - b) não seja de chocolate preto ou não seja de chocolate de leite?
 - c) não seja de chocolate preto e não seja de chocolate de leite?
 - d) seja de chocolate preto ou não seja branco?

$$a. \frac{7}{12}$$

$$b. 1$$

$$c. \frac{1}{4}$$

$$d. \frac{3}{4}$$

Exercícios das páginas 30 e 31.

Exercícios:

1. Um saco contém 30 bolas de diferentes cores: vermelhas, brancas e azuis.

Sabe-se que:

$$P(\text{sair vermelha}) = 1/3 \text{ e } P(\text{sair azul}) = 1/5$$

Extrai-se uma bola do saco ao acaso.

Determina:

- $P(\text{sair branca})$
- $P(\text{não sair vermelha})$
- Quantas bolas azuis há no saco?

2. Numa loja há bonecos de três tipos diferentes: A, B e C, como se mostra na figura seguinte.

Seleciona-se, ao acaso, um boneco da loja. A probabilidade de ser do tipo A é $1/5$ e a probabilidade de ser do tipo B é $1/2$.

2.1 Determina a probabilidade:

- De o boneco ser do tipo C.
- De não sair boneco do tipo A.



2.3 Na loja há 30 bonecos do tipo A. Quantos bonecos há do tipo C?

Explica como obtiveste a tua resposta.

Experiências compostas

As experiências aleatórias até aqui analisadas, por exemplo lançamento de um dado, de um rapa, de uma moeda, ..., são experiências simples, nas quais a contagem do número de casos favoráveis e do número de casos possíveis é fácil. Contudo, quando as experiências se tornam mais complexas torna-se mais difícil efetuar as contagens. Para ultrapassar esta dificuldade existem alguns **métodos** que facilitam a contagem do número de casos favoráveis e possíveis.

Processos organizados de contagem

Exemplo I:

O Carlos atira uma moeda ao ar e em seguida lança um peão. Depois, regista a face da moeda que fica voltada para cima e o número da face do pião que fica encostada à mesa.

- Determina o espaço amostral.
- A probabilidade de ocorrência do acontecimento:
C: "Sair um número par no pião".

➔ **Tabela de dupla entrada**

Moeda \ peão	1	2	3
N	(N, 1)	(N, 2)	(N, 3)
E	(E, 1)	(E, 2)	(E, 3)

$$S = \{(N, 1), (N, 2), (N, 3), (E, 1), (E, 2), (E, 3)\}$$

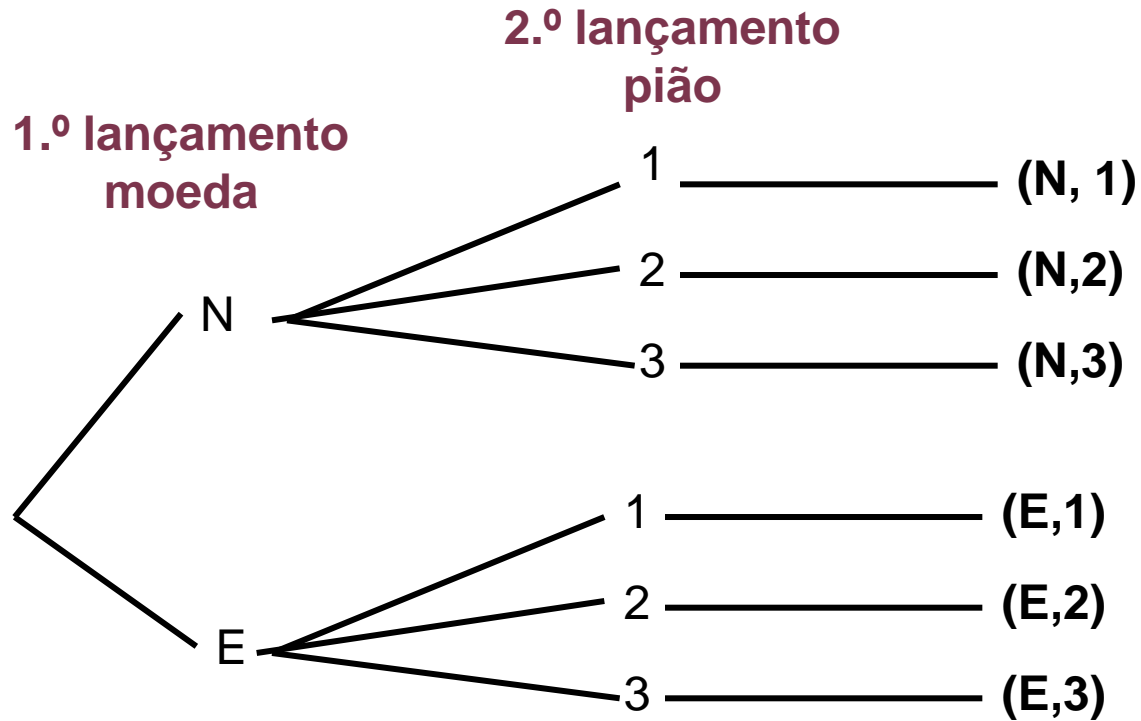


A tabela de dupla entrada é útil no caso de haver **dois** lançamentos/extrações: dados, rapas, moedas, bolas,...

As linhas chamam-se **ramos** do diagrama em árvore.



Diagrama de árvore



$$S = \{(N, 1), (N, 2), (N, 3), (E, 1), (E, 2), (E, 3)\}$$

$$S = \{(N, 1), (N, 2), (N, 3), (C, 1), (C, 2), (C, 3)\}$$

Repara que se quisermos apenas saber o **número de casos** possíveis e não (**quais são**) os casos possíveis da experiência composta basta multiplicar o número de casos possíveis da primeira experiência pelo número de casos possíveis da 2ª experiência.

	1.ª experiência		2.ª experiência		Experiência composta
Nº de casos possíveis →	2	x	3	=	6

$$b) P(\text{"sair nº par no pião"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Dos 6 casos possíveis 2 são favoráveis ao acontecimento sair nº par no pião.

EXPERIÊNCIA II: Lançamento de dois dados e anotar as faces que ficam voltadas para cima.

a) Qual é o n° de casos possíveis?



1.º \ 2.º	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

c) Qual é a probabilidade de sair dois números maiores que 3?

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) Qual é o espaço de resultados?

$$E = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$$

EXPERIÊNCIA III: Ementa de restaurante

Quantas refeições diferentes podemos escolher, considerando que cada refeição é constituída por uma entrada, um prato e uma sobremesa.

2x3x2=12

12 refeições diferentes

Entrada:

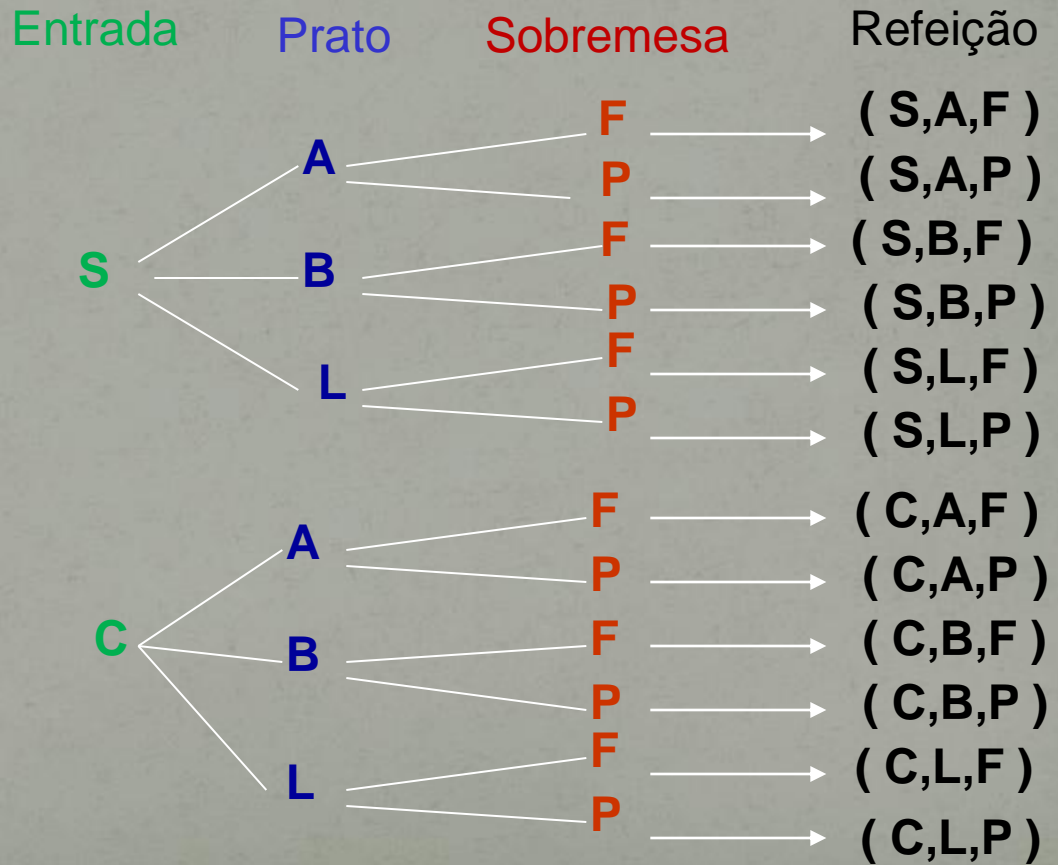
- Sopa
- Canja

Prato

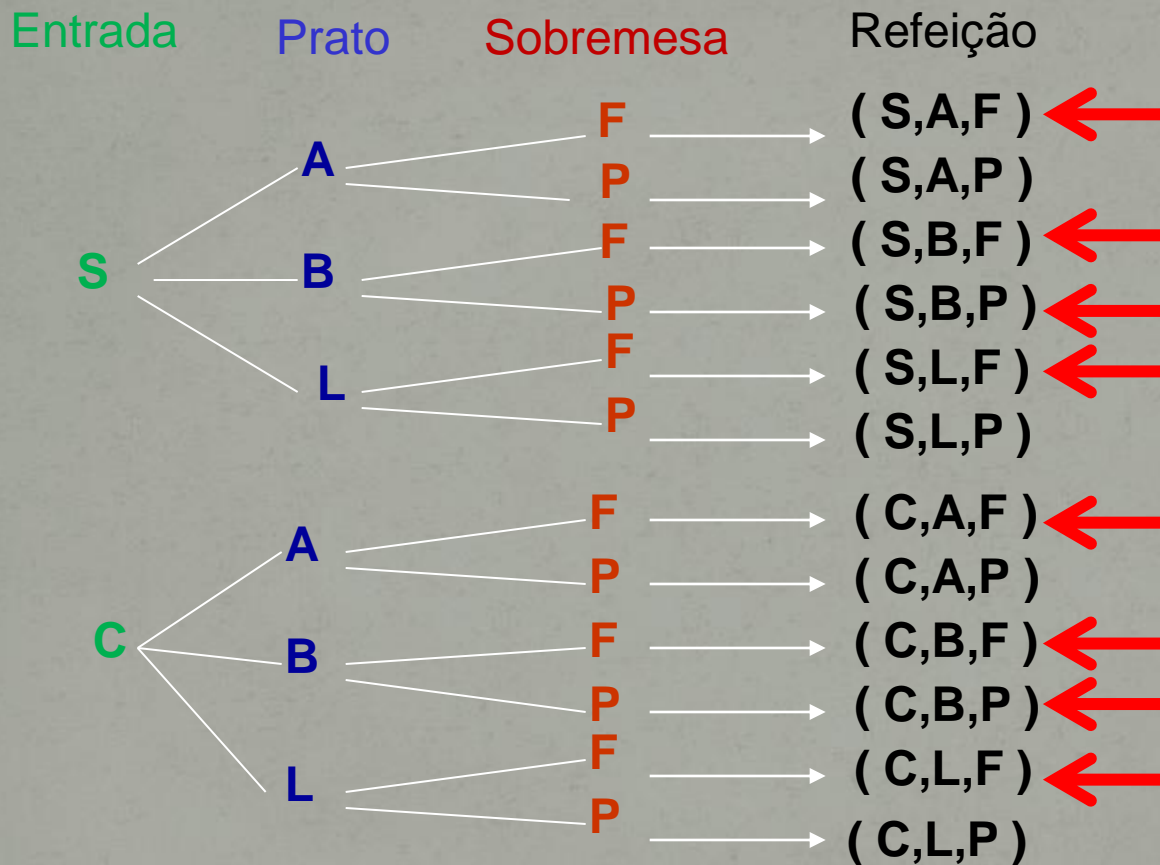
- Arroz de frango
- Bife grelhado
- Lampreia

Sobremesa:

- Fruta da época
- Pudim



Escolhida uma refeição ao acaso qual é a probabilidade de comer bife ou fruta?



$$P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Exemplo 1

Numa academia de dança há 50 alunos e praticam-se duas modalidades: Ballet e Dança Jazz. 25 alunos praticam Ballet, 30 praticam Dança Jazz e 5 as duas modalidades.

Qual a probabilidade de escolhido um aluno ao acaso, ele praticar:

a) Só Ballet?

$$P = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

b) Só Dança Jazz?

$$P = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

c) As duas modalidades?

$$P = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

d) Pelo menos uma das modalidades?

$$P = 1$$

e) Tango?

$$P = 0$$

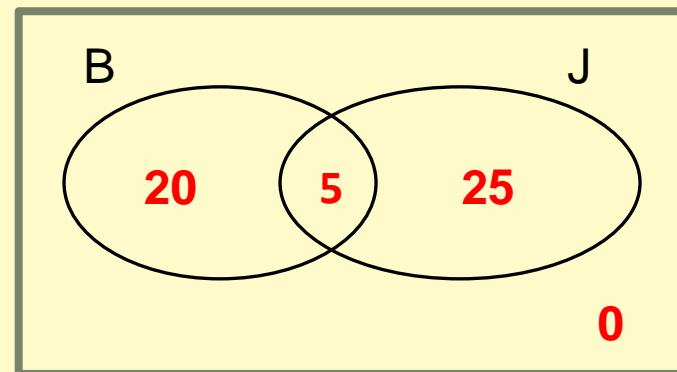
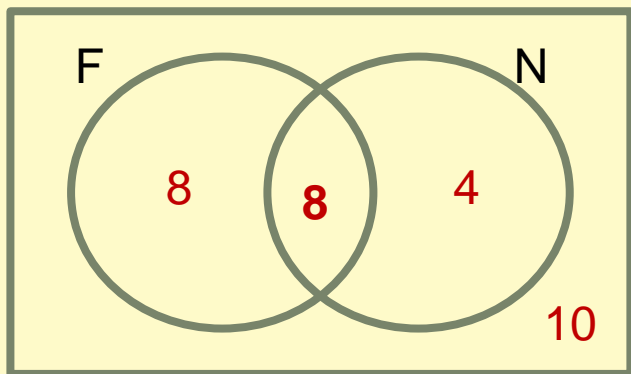


Diagrama de Venn

Exemplo II

Numa sala estão 30 jovens, dos quais 16 praticam futebol, 12 praticam natação e 10 não praticam nem futebol nem natação. Qual a probabilidade de escolhendo um jovem ao acaso ele praticar futebol e natação?



$$16+12+10=38$$

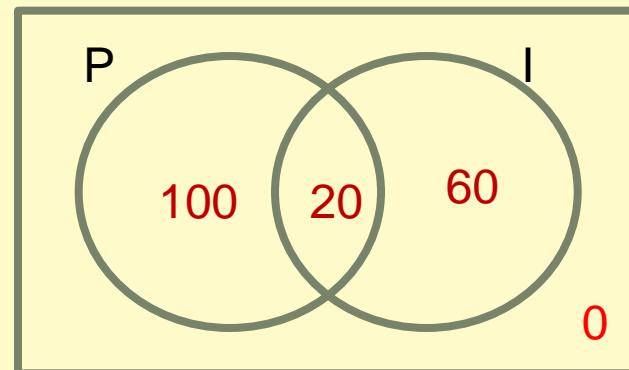
$$38-30=8$$

$$P(F \cap N) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

Exemplo III

Num congresso de Medicina, realizado no rio de Janeiro, participarem 180 congressistas. Destes, 120 falavam português e 80 inglês. Qual a probabilidade de me dirigir, ao acaso, a um congressista e ele:

- Só falar inglês?
- Só falar português?
- Falar as duas línguas?



1. Interrogaram-se 210 pessoas acerca da utilização de dois detergentes: **A** e **B**. Oitenta declararam usar o detergente A, sessenta o detergente B e vinte os dois detergentes.

Selecionou-se, ao acaso, uma das 210 pessoas.

Calcula a probabilidade de ela:

- 1.1.** usar apenas o detergente A
- 1.2.** usar apenas o detergente B
- 1.3.** não usar nenhum dos dois detergentes.
- 1.4.** usar, pelo menos, um dos dois detergentes.

2. Num grupo de 70 estudantes, 42 têm os olhos castanhos, 34 usam óculos e 23 têm olhos castanhos e usam óculos. Constrói um diagrama de Venn e determina a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso:

- 2.1.** usar óculos e não ter olhos castanhos;
- 2.2.** usar óculos ou ter olhos castanhos;
- 2.3.** usar óculos e ter os olhos castanhos;
- 2.4.** não ter olhos castanhos nem usar óculos.

Exercícios:

venn

32, 33,

34, ex. 2

35 exercício 4

15 e 17 pág. 42

28 e 29 da pág. 45

31,32,33 e 34 pág.46 e 47

26, 27 pág. 45

8 pág. 40

24 pág. 44

**TPC 1 DA PÁG. 34
E 3 DA PÁG. 35**

Problemas

“Com e sem reposição”

Exemplo I

Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e uma preta. Extraem-se, ao acaso e **sucessivamente, duas bolas** da caixa, **com reposição**.

Calcula a probabilidade de se obter:

- a) duas bolas vermelhas
- b) Duas bolas pretas
- c) Duas bolas de cor diferente

$$P = \frac{9}{16}$$

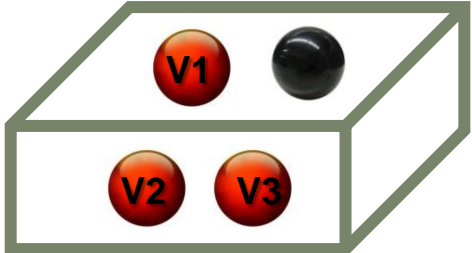
$$P = \frac{1}{16}$$

$$P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

2ª bola \ 1ª bola	V1	V2	V3	P
V1	(V1,V1)	(V1,V2)	(V1,V3)	(V1,P)
V2	(V2,V1)	(V2,V2)	(V2,V3)	(V2,P)
V3	(V3,V1)	(V3,V2)	(V3,V3)	(V3,P)
P	(P,V1)	(P,V2)	(P,V3)	(P;P)

Agora vamos pensar no mesmo exercício **mas sem reposição**.

Neste caso já não vamos ter 16 casos possíveis, porquê?



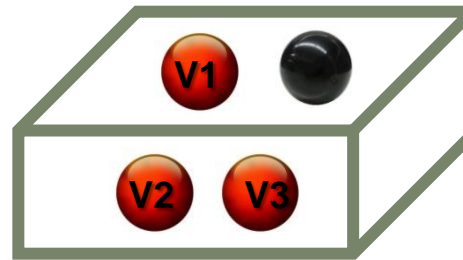
$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P = 0$$

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

2ª bola \ 1ª bola	V1	V2	V3	P
V1	(V1,V1)	(V1,V2)	(V1,V3)	(V1,P)
V2	(V2,V1)	(V2,V2)	(V2,V3)	(V2,P)
V3	(V3,V1)	(V3,V2)	(V3,V3)	(V3,P)
P	(P,V1)	(P,V2)	(P,V3)	(P;P)

Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e uma preta. Extraem-se, ao acaso e **sucessivamente, duas bolas** da caixa, **com reposição**.



Calcula a probabilidade de se obter:

a) duas bolas vermelhas

$$\begin{array}{c}
 \text{1.ª extração} \\
 \frac{3}{4}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \text{2.ª extração} \\
 \frac{3}{4}
 \end{array}
 = P(A) = \frac{9}{16}$$

b) Duas bolas pretas

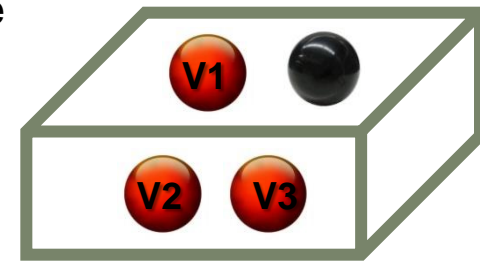
$$\begin{array}{c}
 \text{1.ª extração} \\
 \frac{1}{4}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \text{2.ª extração} \\
 \frac{1}{4}
 \end{array}
 = \frac{1}{16}$$

c) Duas bolas de cor diferente (V, P) ou (P, V)

$$\begin{array}{c}
 \text{1.ª ext.} \\
 \frac{3}{4}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \text{2.ª ext.} \\
 \frac{1}{4}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{1.ª ext.} \\
 \frac{1}{4}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \text{2.ª ext.} \\
 \frac{3}{4}
 \end{array}
 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Outro processo

Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e uma preta. Extraem-se, ao acaso e **sucessivamente, duas bolas** da caixa, **sem reposição**.



Calcula a probabilidade de se obter:

a) duas bolas vermelhas

1.^a extração e 2.^a extração

$$\frac{3}{4}$$

×

$$\frac{2}{3}$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

b) Duas bolas pretas

1.^a extração

2.^a extração

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

×

$$\frac{0}{3}$$

= 0

c) Duas bolas de cor diferente (V, P) ou (P, V)

1.^a ext.

e

2.^a ext.

ou

1.^a ext.

e

2.^a ext.

$$P(C) = \frac{3}{4}$$

×

$$\frac{1}{3}$$

+

$$\frac{1}{4}$$

×

$$\frac{3}{3}$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

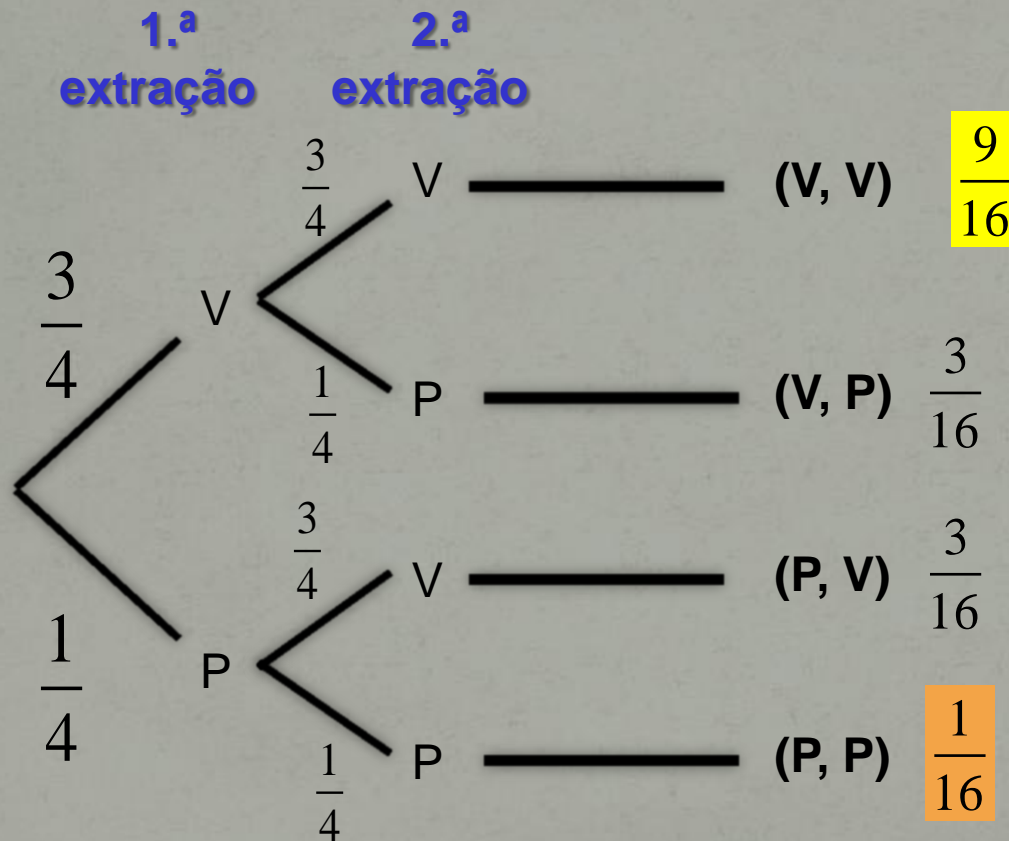
Outro processo

Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e uma preta. Extraem-se, ao acaso e **sucessivamente, duas bolas** da caixa, **com reposição**.

Calcula a probabilidade de se obter:

- a) duas bolas vermelhas
- b) Duas bolas pretas
- c) Duas bolas de cor diferente

Árvore das probabilidades

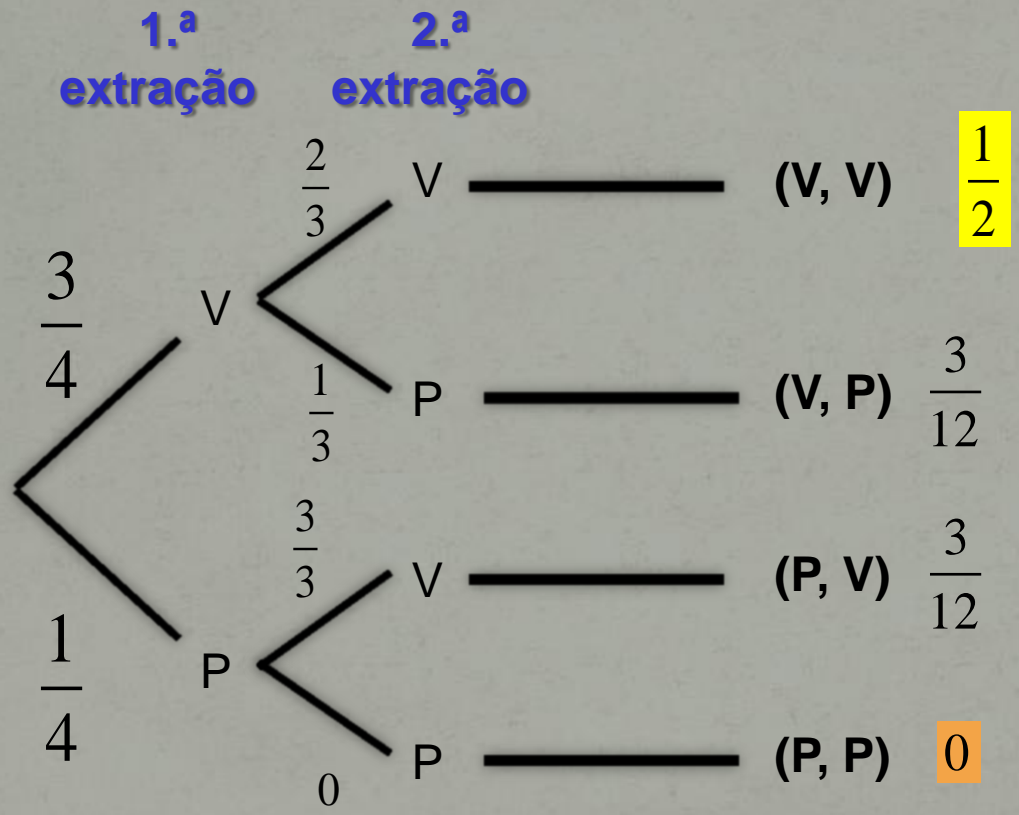


$$c) \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e uma preta. Extraem-se, ao acaso e **sucessivamente, duas bolas** da caixa, **sem reposição**.
Calcula a probabilidade de se obter:

Árvore das probabilidades

- a) duas bolas vermelhas
- b) Duas bolas pretas
- c) Duas bolas de cor diferente



c) $\frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

1. Uma caixa contém três bolas pretas e uma branca. Extraem-se, ao acaso e sucessivamente, duas bolas da caixa, com reposição. Calcula a probabilidade de se obter:

a) Duas bolas pretas;

$$\frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{16}$$

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{16}$$

b) Duas bolas brancas;

c) Duas bolas de cor diferente.

d) A primeira ser preta e a segunda ser branca.

2. Resolve o mesmo exercício **mas sem reposição**.

$$\frac{1}{2}$$

$$0$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}$$

3. Sem repor, tiram-se ao acaso, sucessivamente, 3 bolas de um saco, que contém 3 bolas vermelhas e 1 branca.

Calcula a probabilidade de:

a) As três bolas serem vermelhas;

$$\frac{1}{4}$$

b) Pelo menos duas bolas serem vermelhas.

$$1$$

4. No roupeiro, a Ana tem duas camisas (uma branca e uma preta), três saias (uma azul, uma branca e uma preta) e dois casacos (um verde e um branco).

Tirando ao acaso uma camisa, uma saia e um casaco, qual a probabilidade de serem da mesma cor?

$$\frac{1}{12}$$

5. Uma caixa contém dois pares de luvas: um par de tamanho grande e um par de tamanho pequeno. Duas luvas são tiradas à sorte da caixa. Qual a probabilidade de se “tirar um par de luvas”?

$\frac{1}{3}$

6. A Joaquina tirou, ao acaso, um botão de uma caixa que continha 2 botões verdes e dois botões castanhos. Depois, a Joaquina tirou novamente um botão da caixa sem olhar.

6.1 Qual a probabilidade de os dois botões serem verdes se a:

a) A Joaquina repôs o botão na caixa?

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}$

b) A Joaquina não repôs o botão na caixa?

6.2 Qual a probabilidade de extrair dois botões de cor de cor diferente se o primeiro botão não for repostado na caixa?

**Exercícios das páginas 50 e 51,
ex. 4, 5, 7, 8, 9, 10**

Estimativa de uma probabilidade



A Sofia deixou cair uma colher e observou que tinha ficado virada para baixo. Qual era a probabilidade de isso acontecer?

Como a colher não é um objeto equilibrado como uma moeda, seria um erro dizer que a probabilidade é 50%. Os resultados «ficar virada para cima» e «ficar virada para baixo» não são igualmente possíveis e, por isso, não se pode aplicar a regra de Laplace.

No entanto, existe uma alternativa: repetindo muitas vezes a experiência de deixar cair a colher, pode usar-se a frequência relativa do acontecimento «ficar virada para baixo» como uma boa estimativa da sua probabilidade.

Por exemplo, se se deixar cair a colher 200 vezes e ela ficar 65 vezes virada para baixo, poder-se-á concluir que:

$$P \approx \frac{65}{200} \approx 32,5\%$$

Assim a relação entre a frequência relativa e a probabilidade fornece um método para obter uma estimativa da probabilidade.

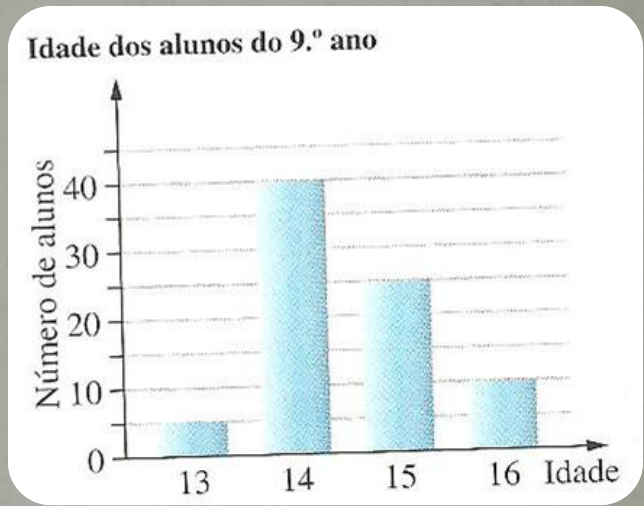
Quanto mais vezes a experiência é repetida, melhor é a estimativa.

5. Um dos trabalhos realizados pelo João para a disciplina de matemática consistiu em fazer o registo das idades dos alunos do 9.º ano da sua escola e elaborar um gráfico da distribuição dos alunos por idades. O gráfico que o João elaborou está correto.

Qual é a média das idades dos alunos do 9.º ano da escola do João? Mostra como chegaste à resposta.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno do 9.º ano da escola do João.

- a) Qual é a probabilidade desse aluno ter 15 anos?
- b) Sabendo que esse aluno tem menos de 15 anos, qual é a probabilidade de ter 13 anos?



Um saco tem 8 bolas numeradas de 1 a 8. Extrai-se uma bola ao acaso e regista-se o número que sai.

Considera os acontecimentos A, B e C.

A: "sair um número divisor de 7."

B: "sair um número par."

C: "sair um número divisor de 6."

$$A = \{1, 7\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

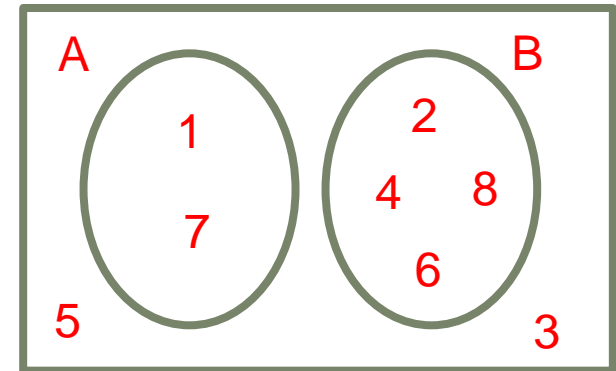
$$C = \{1, 2, 3, 6\}$$

1. Justifica a afirmação:

A e B são acontecimentos disjuntos.

2. Calcula $P(A \cup B)$ e $P(A) + P(B)$.

Compara os resultados obtidos. O que verificas?



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Quando os acontecimentos são disjuntos.



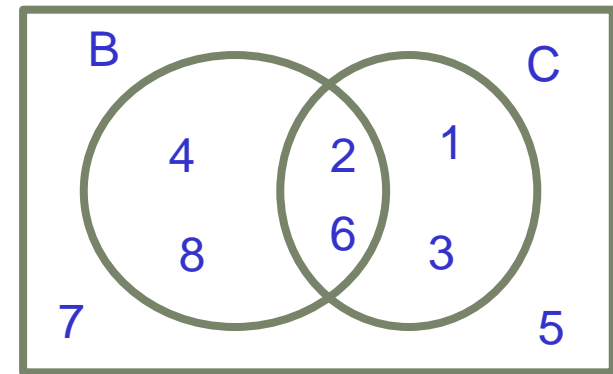
$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 6\}$$

1. Prova que:

B e C não são acontecimentos disjuntos.

2. Calcula $P(B \cup C)$ e $P(B) + P(C)$.



$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

Quando os acontecimentos são compatíveis ou não disjuntos.