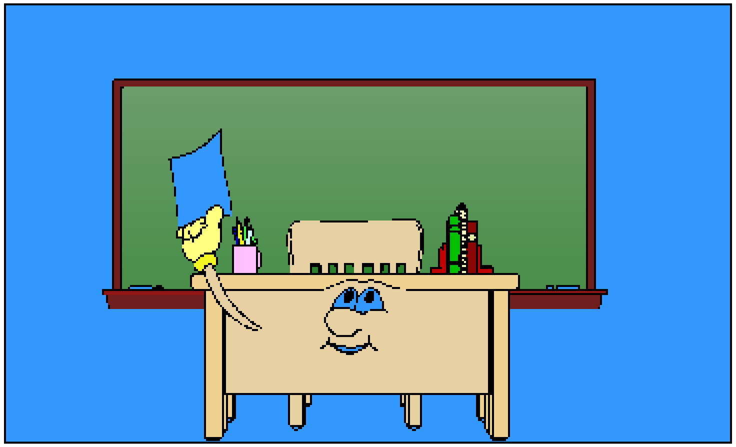
Retas e planos. Posições relativas

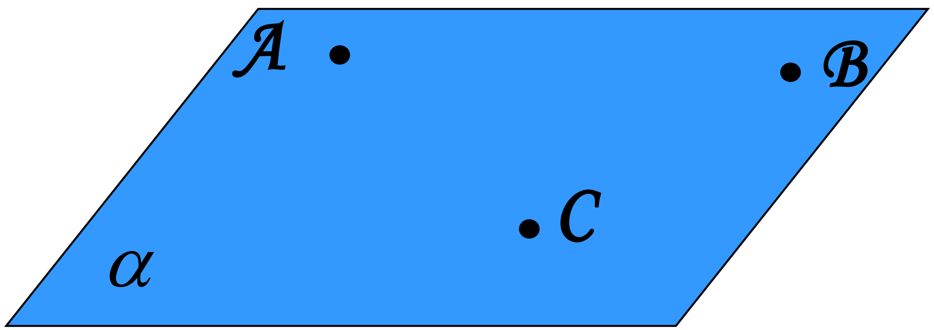
Recordar…

Noção de Plano

Se prolongares indefinidamente e em todas as direções o tampo do quadro, obténs um **Plano**.



Como desenhar um plano é impossível, convencionou-se este seria representado por um

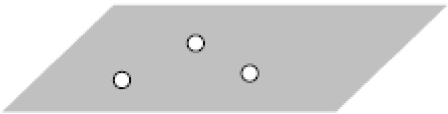


e designá-lo por uma letra grega

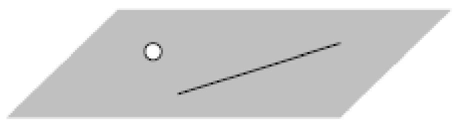
ou por três dos seus pontos não colineares.

Modos de definir um plano:

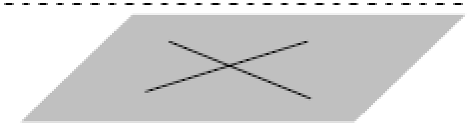
Três pontos não colineares



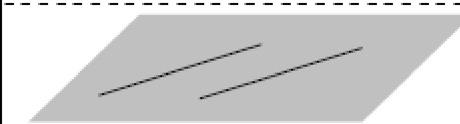
Uma reta e um ponto exterior à reta



Duas retas concorrentes

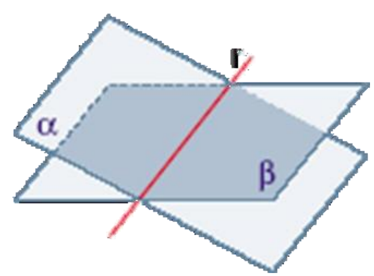


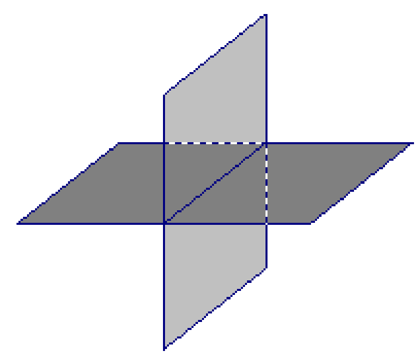
Duas retas paralelas não coincidentes



Posição relativa de Planos no espaço

- Paralelos
  - Estritamente Paralelos
  - Coincidentes
- Concorrentes ou secantes
  - Oblíquos
  - Perpendiculares

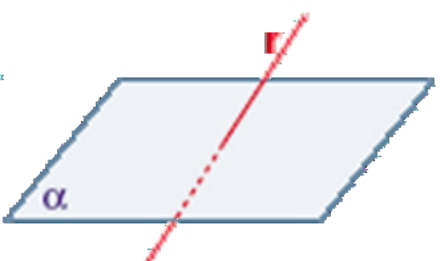




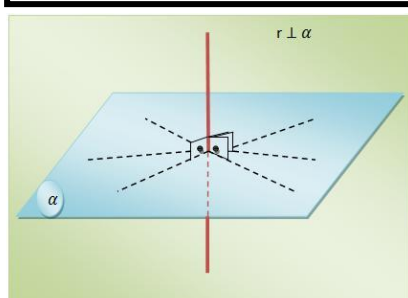
Posição relativa de Retas e Planos no espaço

Reta Concorrente ou secante ao plano

Oblíqua



Perpendicular

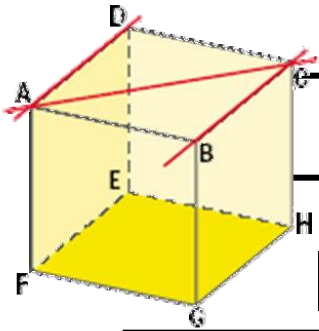


Reta Paralela ao plano

Reta estritamente paralela ao plano

Reta Aposta ou contida no plano

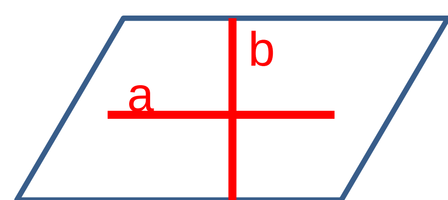
Posição relativa de Retas

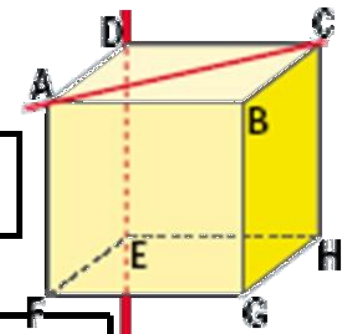
- Complanares
  

  - Paralelas
    - Estritamente Paralelas
      

    - Coincidentes
      

  - Concorrentes
    - Oblíquas
      

    - Perpendiculares
      

- Não Complanares
  

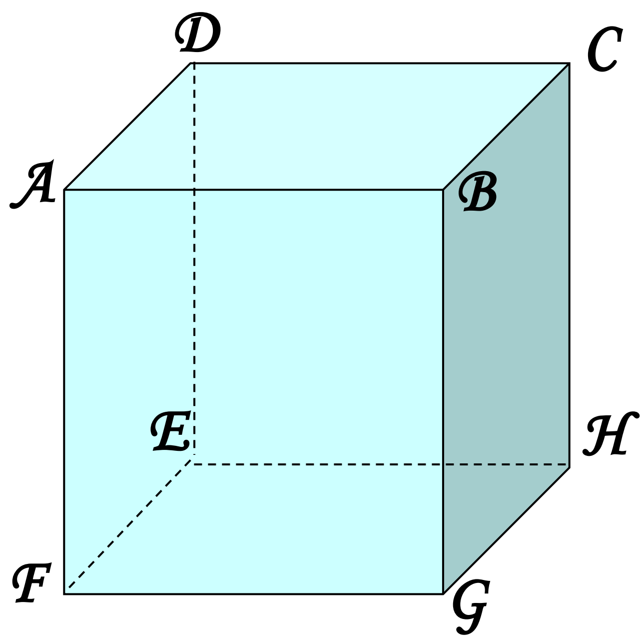
Não esquecer…

Retas, representam-se por duas letras maiúsculas ou uma letra minúscula.

Planos, representam-se por 3 letras maiúsculas ou uma letra grega.

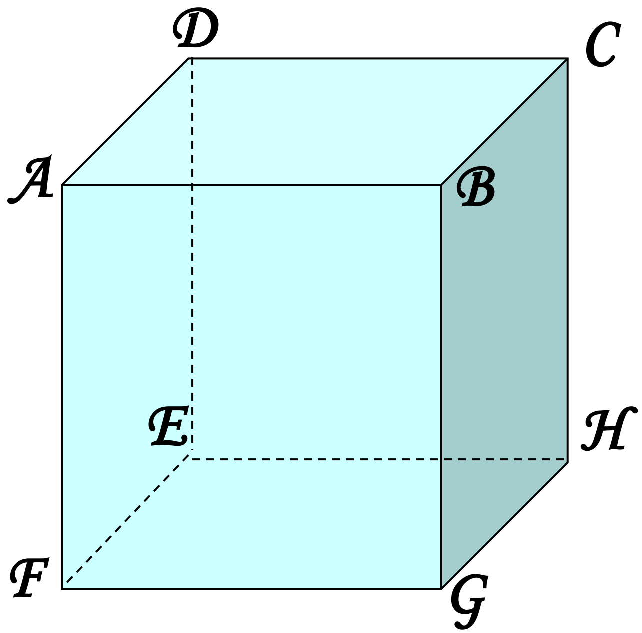
Exercício: Considera os planos que correspondem ao prolongamento das faces do sólido e completa a seguinte tabela.

Planos paralelos	Planos concorrentes
ADC e EHG	ABC e ABG
AEF e BGH	CDE e CBH
ABG e CDE	ADG e BCE



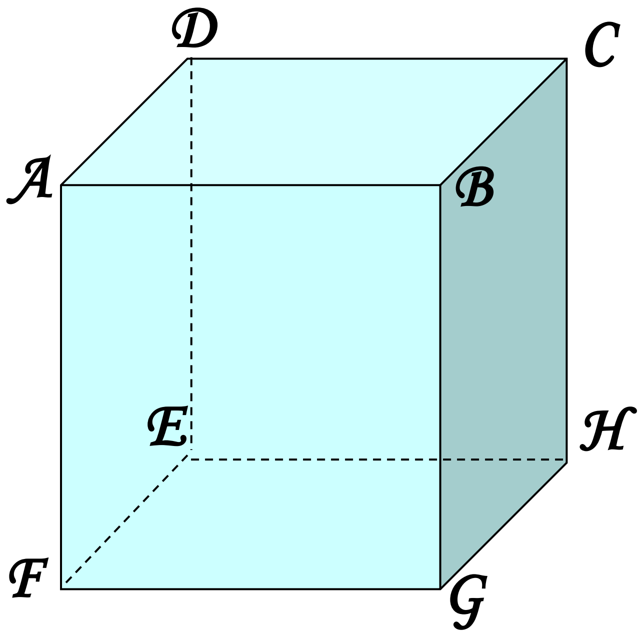
Exercício: Considera as rectas que correspondem ao prolongamento das arestas do sólido e completa a seguinte tabela.

Rectas paralelas a planos	Rectas concorrentes a planos
Reta AB e plano EFG	Reta AD e plano CDE
Reta BG e plano CDE	Reta DE e plano ABC
Reta DE e plano DEF	Reta DB e plano ABG



Exercício: Considera as rectas que correspondem ao prolongamento das arestas do sólido e completa a seguinte tabela.

Retas não complanares	Retas paralelas	Retas concorrentes
FG e CH	AB e DC	AD e AB
AB e DE	BG e CH	AC e CB
AF e EH	AD e GH	EF e EH



Usando a sala de aula...

- O plano formado pela porta é sempre ___**perpendicular**___ao plano do chão.
- O plano formado pelo tecto é __**perpendicular**____ a cada um dos planos formados pelas paredes.
- O plano formado pelo chão é ___**paralelo**________ao plano formado pelo teto.
- O plano formado pelo chão é __**perpendicular**_____ a cada um dos planos formados pelas paredes.

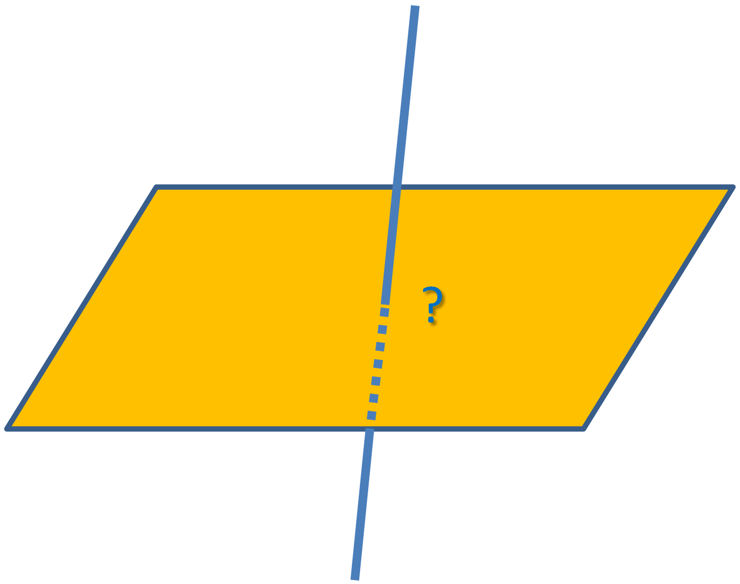
Usando o livro de ponto e a mesa do professor......

- O livro de ponto sobre a mesa pode ser a representação de dois planos __**coincidentes**_____.
- Se o livro de ponto fizer um ângulo de 90º com a mesa, temos dois planos __**concorrentes perpendiculares.**
- Se abrir o livro obtenho dois ou vários planos __**c. oblíquos**______, formados pelas folhas.
- Quando o livro está fechado, as suas folhas representam vários planos __**coincidentes**_____.

Exercícios 35 e 36 do manual adotado da página 111

Critérios de paralelismo e de perpendicularidade

Certamente resolveste sem dificuldade os exercícios anteriores. No entanto se quisesses justificar algumas respostas já não seria assim tão fácil. Além disso, muitas vezes a própria figura não é muito clara para decidirmos qual a posição relativa.



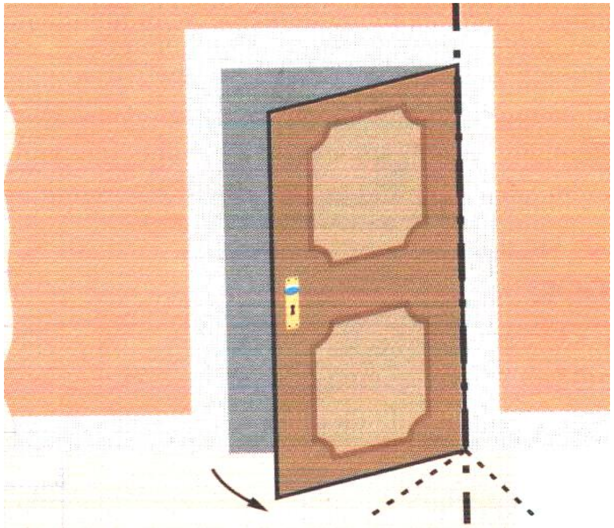
Vamos estudar, então critérios que são condições suficientes para garantir certas posições relativas.

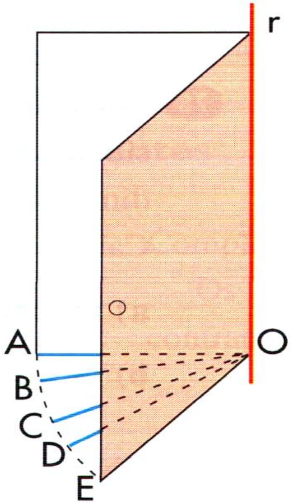
Critérios de perpendicularidade

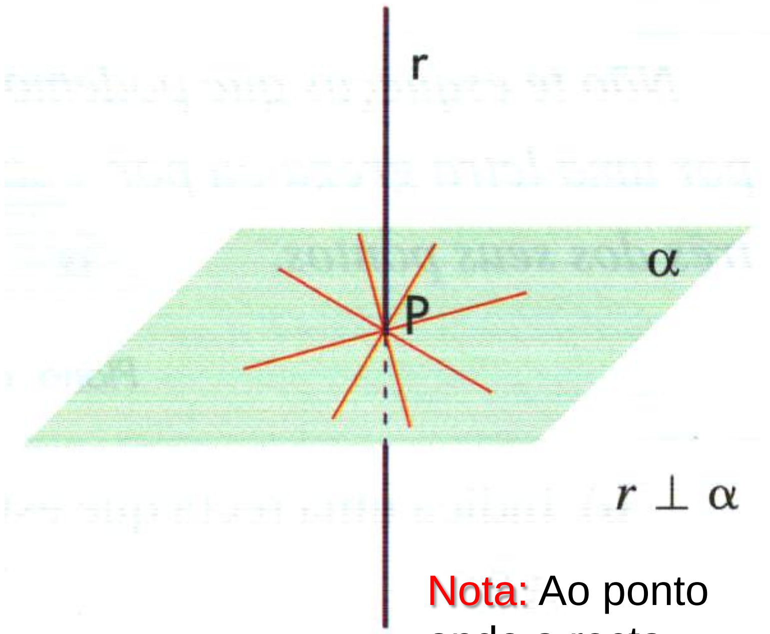
- Perpendicularidade de uma reta e um plano
- Perpendicularidade de dois planos

Perpendicularidade entre recta e plano

Se considerarmos o exemplo de uma porta a abrir-se, a porta roda em torno do seu eixo. O eixo da porta é perpendicular ao plano do chão.
Repare-se que, quando a porta roda, o eixo (r) é sempre perpendicular à linha que ela vai definindo no chão (o eixo é perpendicular às rectas que contêm o bordo inferior da porta).





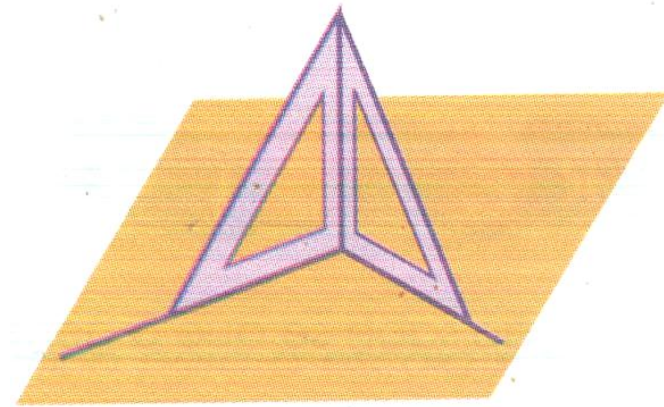


Uma ***recta é perpendicular a um plano*** se for perpendicular a todas as rectas do plano que passam pelo seu pé.

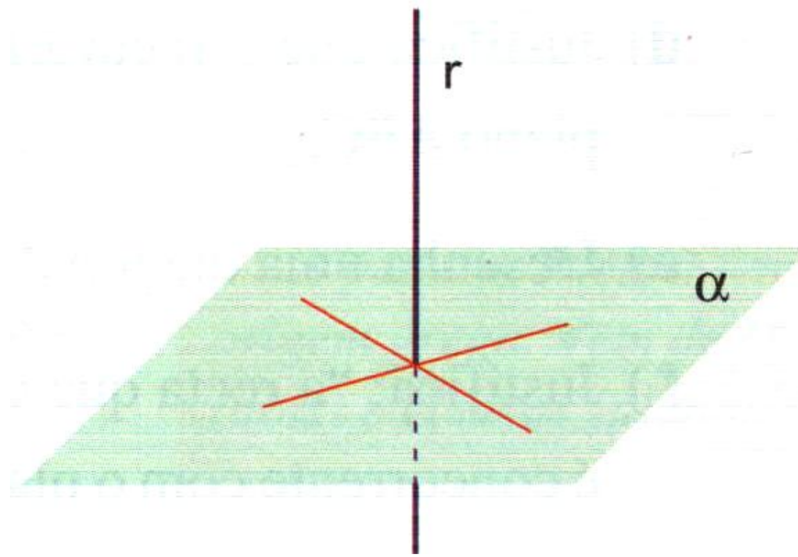
Nota: Ao ponto onde a recta encontra um plano chama-se **PÉ DA RECTA**.

Uma experiência simples, feita com dois esquadros, mostra que:

Experiência com os esquadros.

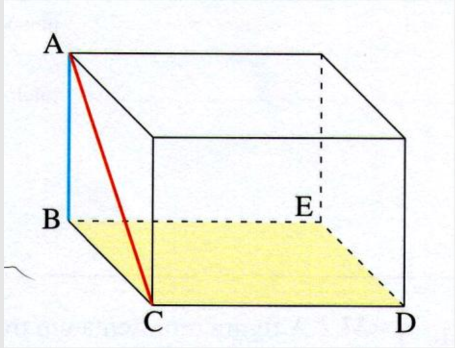


Para que uma recta seja perpendicular a um plano **basta (é suficiente)** que seja perpendicular a duas rectas concorrentes desse plano que passem pelo seu pé.



Critério de ***perpendicularidade entre recta e plano.***

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano então é perpendicular a esse plano e perpendicular a todas as retas desse plano.

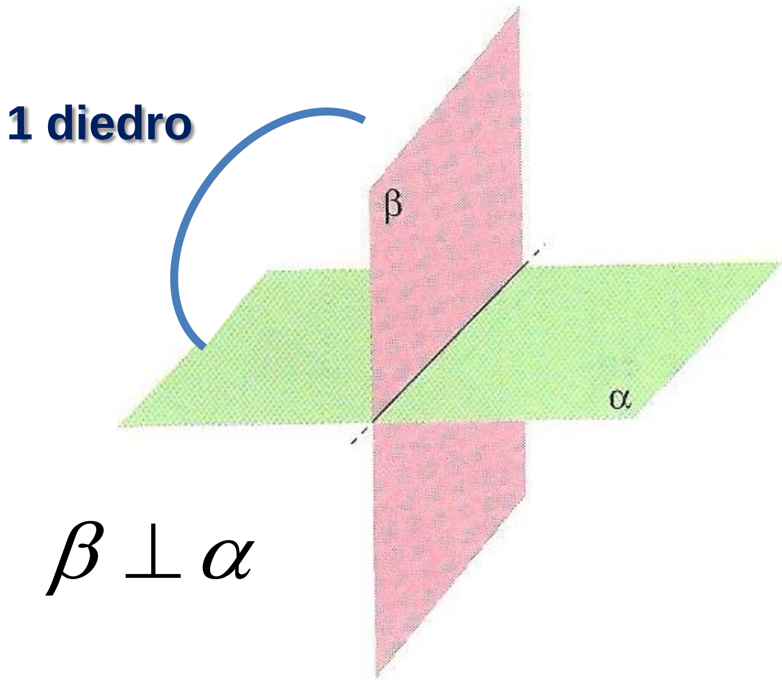
Quando é que utiliza este critério?	Como é que se utiliza o critério?	Exemplo:
Quando se quer provar que uma reta é perpendicular a um plano.	Basta procurar nesse plano duas retas concorrentes que sejam perpendiculares à reta dada.	**Prova que a reta AB é perpendicular ao plano BCD.** A reta AB é perpendicular ao plano BCD porque é perpendicular às retas BC e BE que são concorrentes e que estão contidas no plano BCD.  A reta AB é perpendicular às retas BC e BE porque são lados adjacentes de um retângulo, logo são perpendiculares.

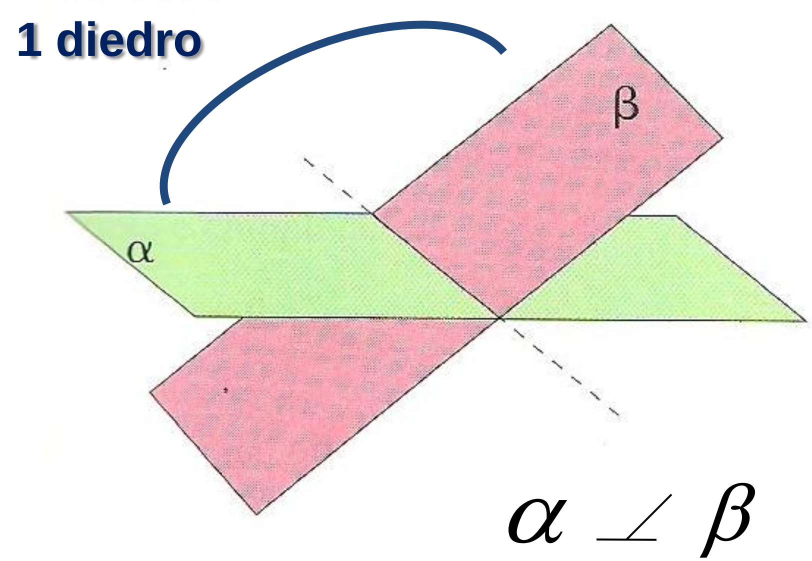
Critério de perpendicularidade entre dois planos

Usando folhas de cartão...

Colocando as folhas na posição de dois planos concorrentes, estes dividem o espaço em quatro regiões.

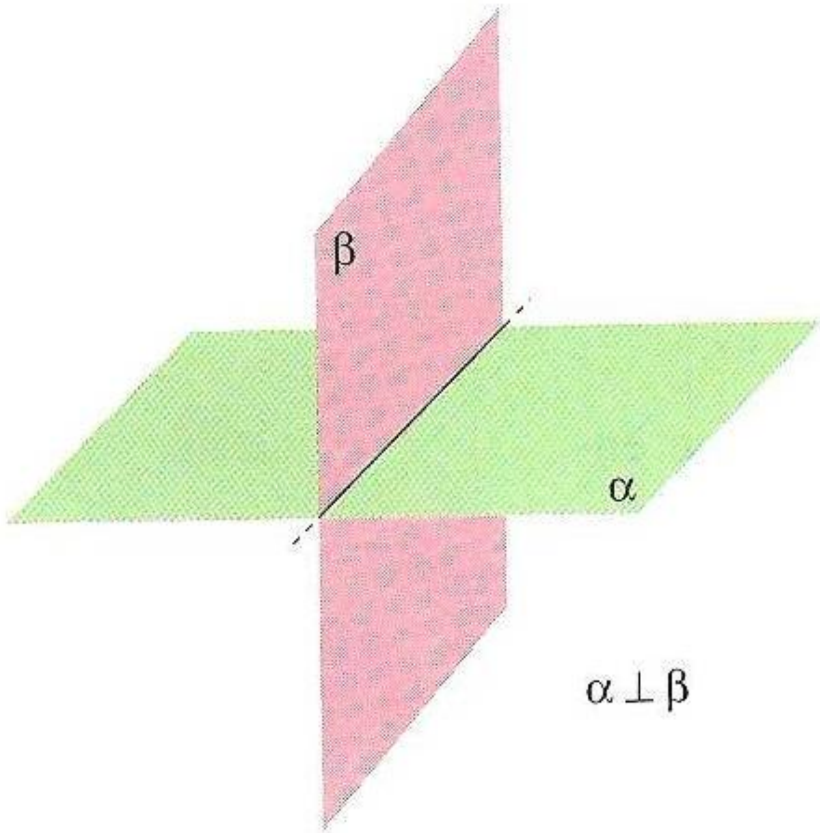
Cada uma das regiões chama-se **DIEDRO**.



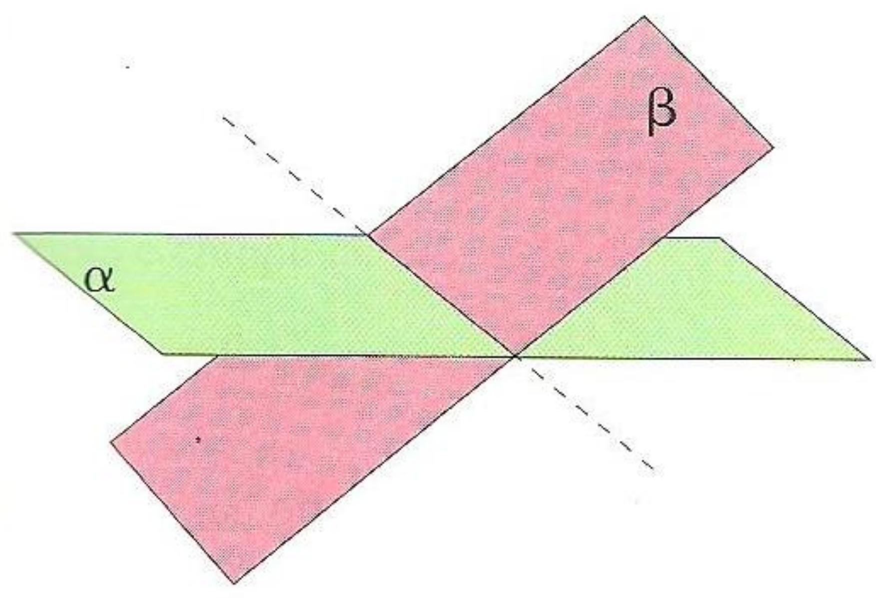


DIEDRO é cada uma das quatro regiões em que fica dividido o espaço quando dois planos se intersetam.

Perpendicularidade *entre planos*



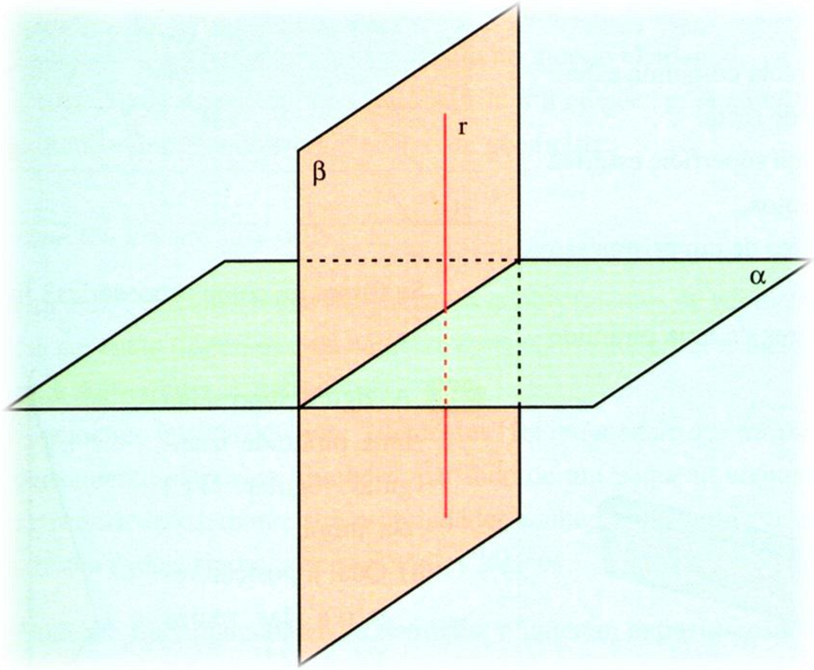
Se os quatro diedros forem iguais , os planos dizem-se **PERPENDICULARES.** Caso contrário, os planos são **OBLÍQUOS.**



Dois planos são perpendiculares quando os 4 diedros são iguais.

Critério de ***perpendicularidade entre planos.***

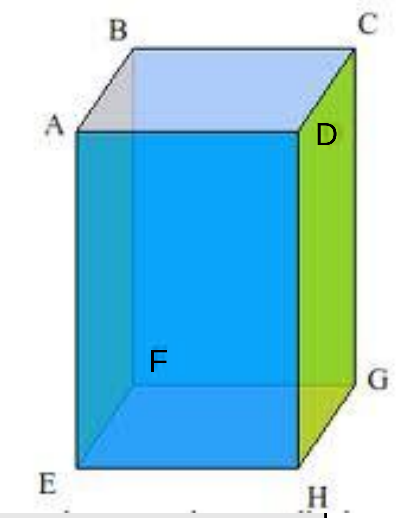
Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano, então os dois planos são perpendiculares.



$$Se\ r \subset \beta\ e\ r \perp \alpha\ então\ \beta \perp \alpha$$

Critério de *perpendicularidade entre dois planos*

Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano então os dois planos são perpendiculares.



Quando é que utiliza este critério?	Como é que se utiliza o critério?	Exemplo:
Quando se quer provar que um plano é perpendicular a outro.	Basta encontrar nesse plano uma reta que seja perpendicular ao outro plano.	**Prova que o plano AEH é perpendicular ao plano HGC.** **O plano AEH é perpendicular ao plano HGC porque contém a reta EH que é perpendicular ao plano HGC (a reta EH é perpendicular ao plano HGC porque é perpendicular às retas HG e HD, que são concorrentes e que estão contidas no plano HGC).**

Critérios de paralelismo

Entre uma reta e um plano

Entre dois planos

Critério de paralelismo entre retas e planos

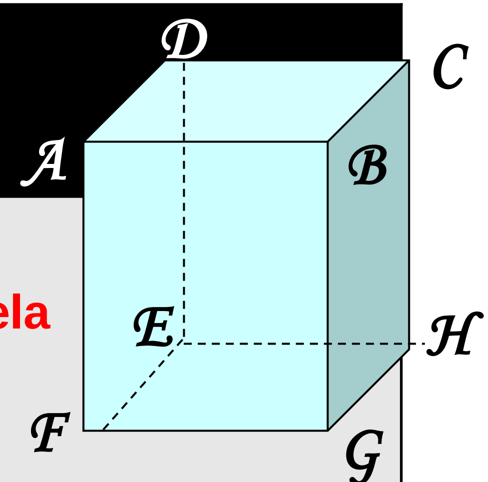
Assim, podemos enunciar o **seguinte critério:**

Se uma reta é paralela a outra reta contida num plano então é paralela a esse plano.

$$Se\ r\ //\ s\ e\ s \subset \beta\ então\ r\ //\ \beta$$

Critério de paralelismo entre uma reta e um plano

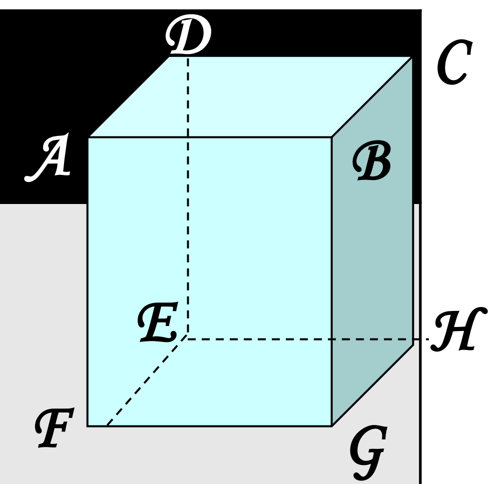
Se uma reta é paralela a outra reta contida num plano, então é paralela a esse plano.

Quando é que utiliza este critério?	Como é que se utiliza o critério?	Exemplo:
Quando se quer provar uma reta é paralela a um plano.	Basta encontrar no plano uma reta que seja paralela à reta dada.	**Prova que a reta AD e paralela ao plano o plano FGH.**  **A reta AD é paralela ao plano FGH porque é paralela à reta FE que está contida nesse plano, FGH.** **(As retas AD e FE são paralelas porque contêm os segmentos de reta AD e FE que sendo lados opostos do retângulo [ADEF], são paralelos).**

Critério de *paralelismo entre dois planos*

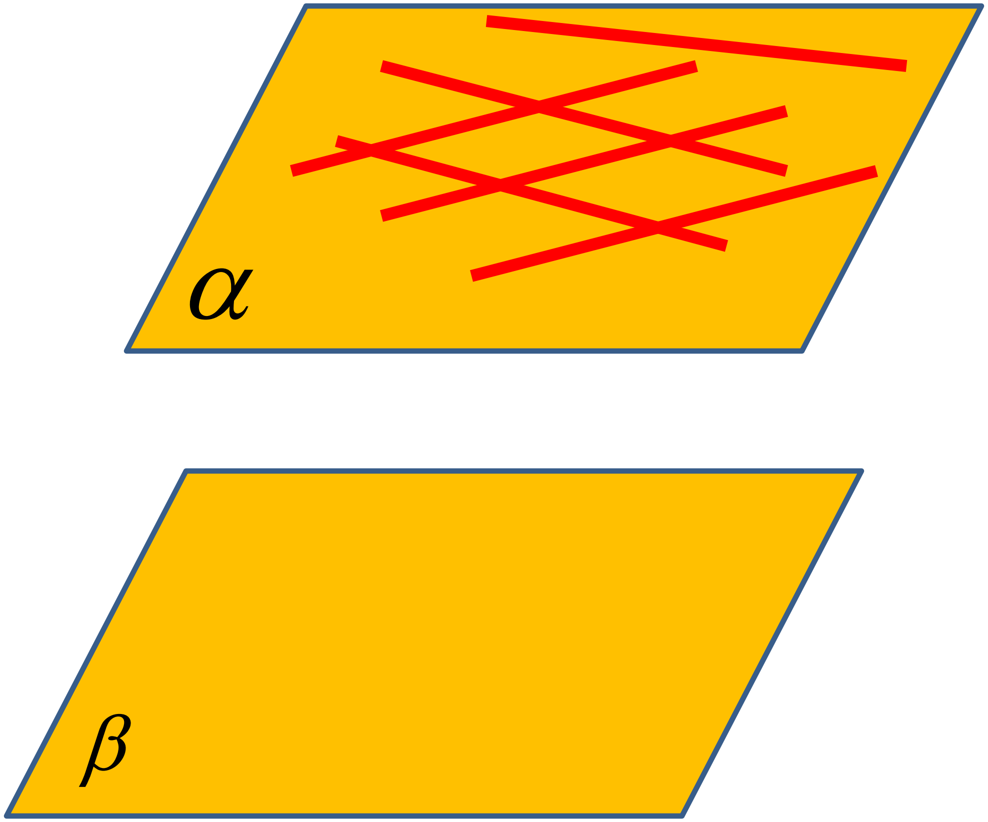
Se um plano contém duas retas concorrentes, paralelas a outro plano, então os dois planos são paralelos.

Quando é que utiliza este critério?	Como é que se utiliza o critério?	Exemplo:
Quando se quer provar que um plano é paralelo a outro.	Basta encontrar nesse plano duas retas concorrentes que sejam paralelas ao outro plano.	**Provar que o plano ABC é paralelo ao plano FGH.** **O plano ABC é paralelo ao plano FGH porque contém duas retas concorrentes, AB e BC, que são paralelas ao plano FGH.** **A reta AB é paralela ao plano FGH porque é paralela à reta FG que está contida nesse plano. De igual modo a reta BC é paralela ao plano FGH porque é paralela à reta GH que está contido nesse plano.**

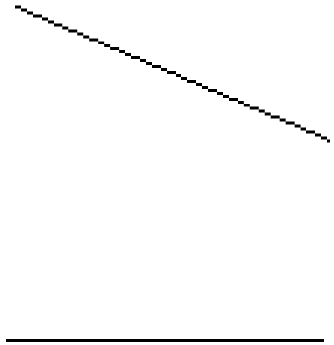


É fácil verificar que:

Se um plano é paralelo a outro, todas as retas de um deles são paralelas ao outro.



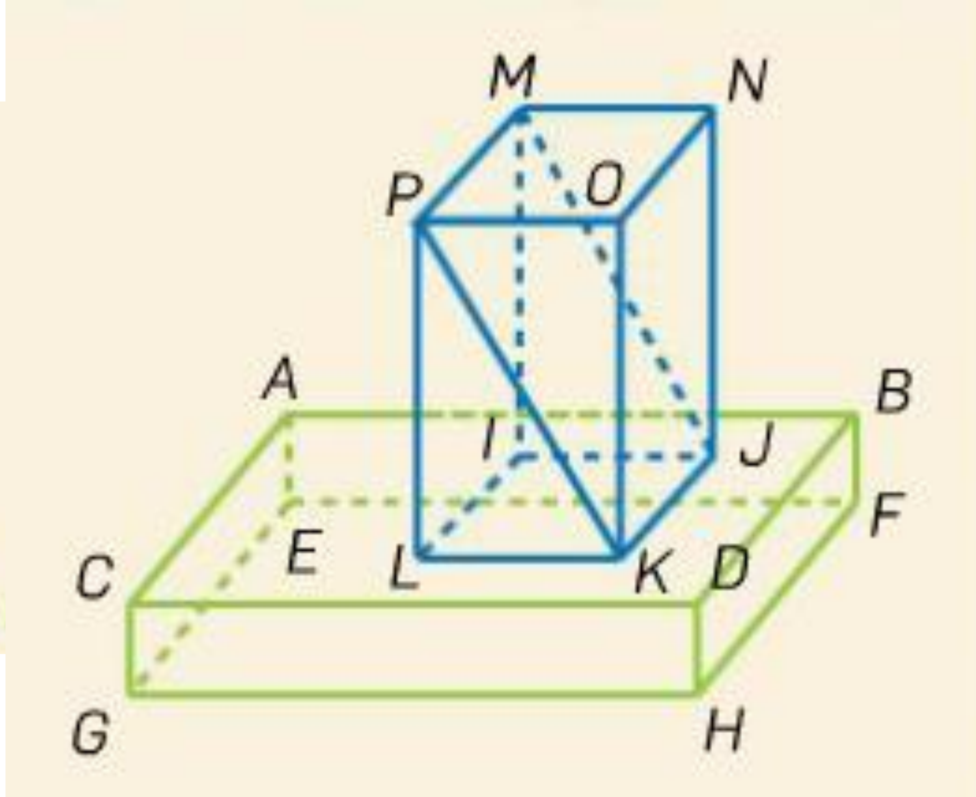
5.º Postulado de Euclides



Se uma linha recta cai sobre outras duas ...

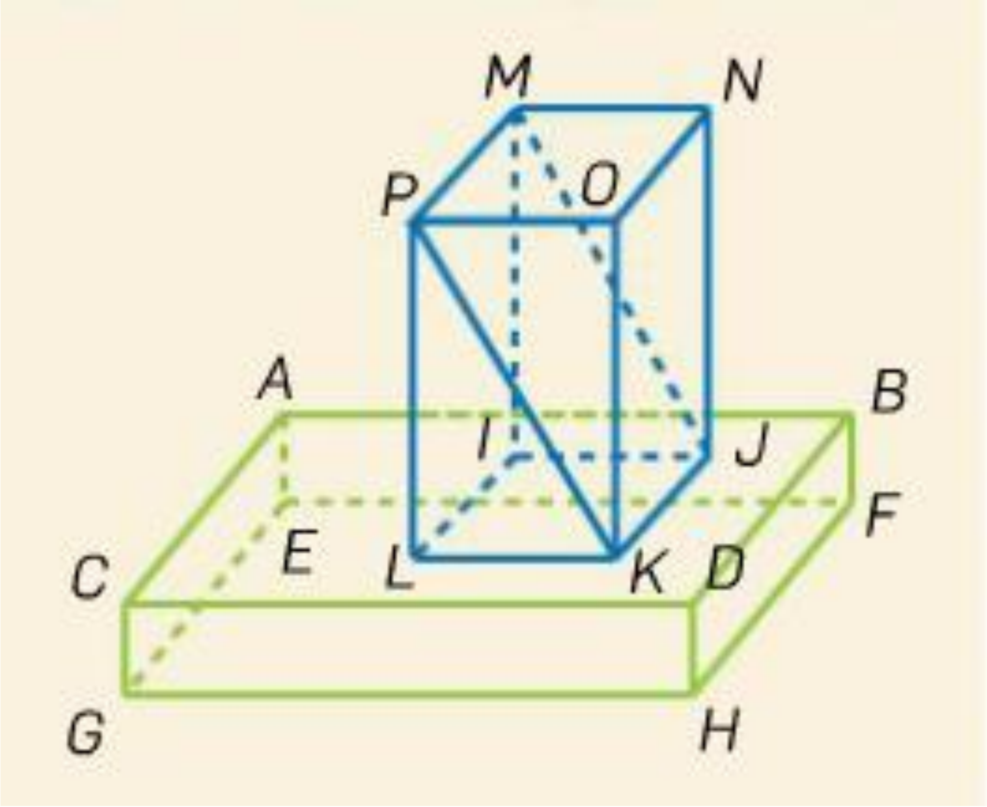
330 a. C. - 260 a. C

Resolver os exercícios da página 113



39. a) A reta PL é perpendicular ao plano LKJ, porque é perpendicular às retas LK e LI, que são concorrentes entre si (contêm os segmentos de reta que são lados adjacentes de um retângulo) e estão contidas no plano LKJ.

39. b) A reta ON é paralela ao plano ABD, porque existe nesse plano uma reta paralela à reta ON, a reta KJ (contêm dois segmentes que são lados opostos de um retângulo) . Logo a reta ON é // ao plano ABD.

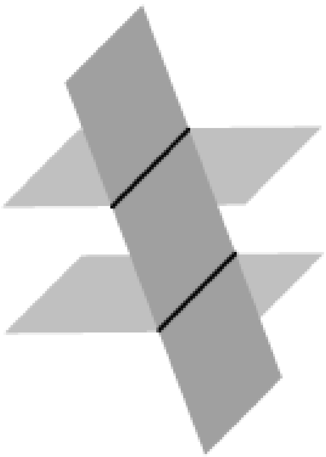


39. c) O plano ABD é perpendicular ao plano BFH porque existe nesse plano a reta CD que é perpendicular ao plano BFH. A reta CD é perpendicular ao plano BFH porque é perpendicular às retas DH e DF que pertencem ao plano e são concorrentes entre si.

39. d) O plano ABD é paralelo ao plano GHF porque existem nesse plano duas retas concorrentes, as retas CD e DB (contêm os segmentos de reta que são lados adjacentes de um retângulo), que são paralelas ao plano GHF.

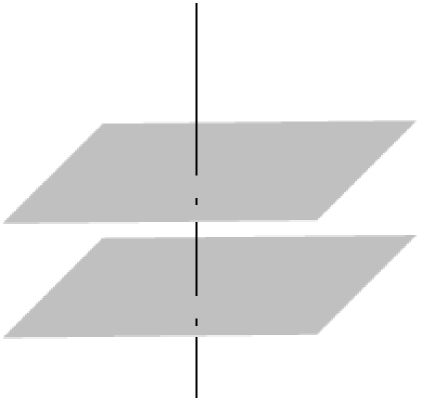
Alguns dos resultados demonstrados por Euclides e que estão associados aos critérios de perpendicularidade e de paralelismo que estudámos.

❖ Um plano corta planos paralelos segundo rectas paralelas



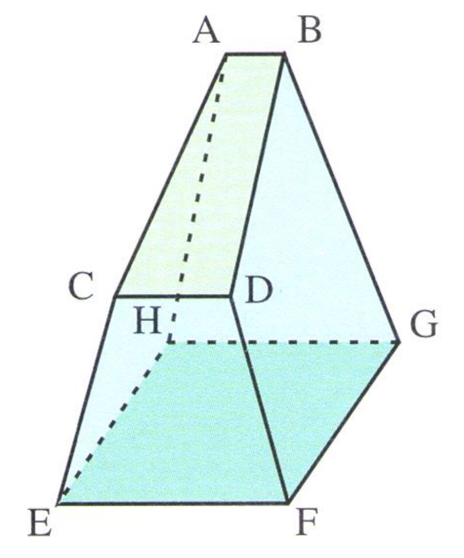
❖ Dois planos distintos paralelos a um terceiro são paralelos entre si

❖ Dois planos perpendiculares à mesma recta são paralelos entre si

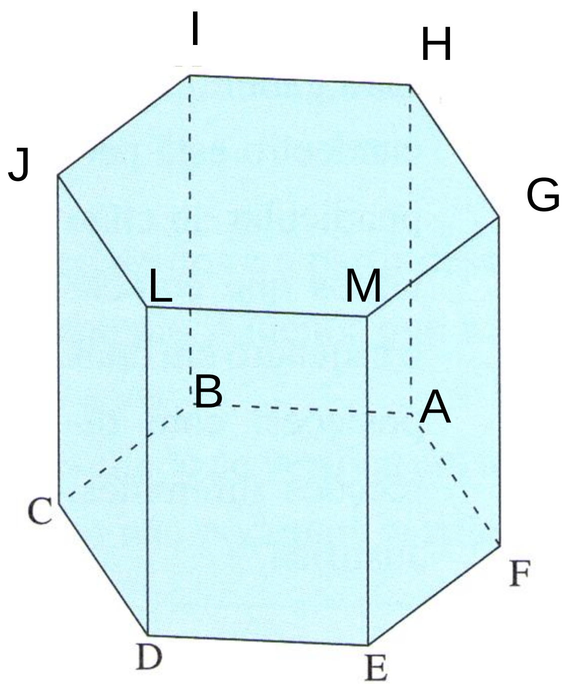


Exercício:

A figura representa o tronco de uma pirâmide.
As rectas AB e CD contidas no plano CAB são paralelas ao plano EFG.
Podes concluir que os planos considerados são paralelos?



Na figura está representado um prisma hexagonal recto e regular.



Justifica as afirmações:

a) A reta IJ é paralela ao plano CDE da base.

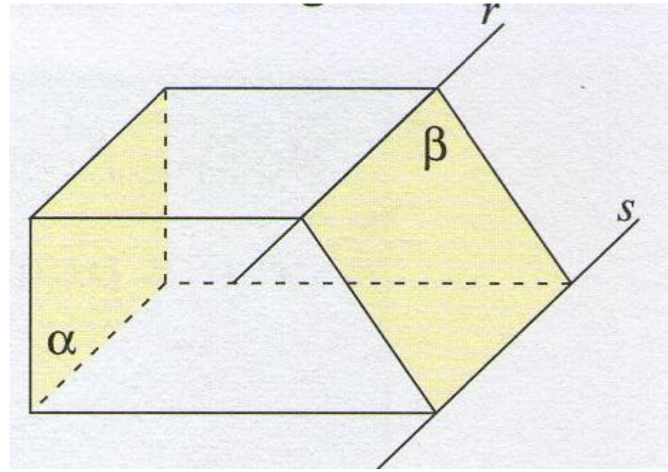
b) A reta JC é perpendicular aos planos das bases.

c) O plano JCD é perpendicular ao plano CDE.

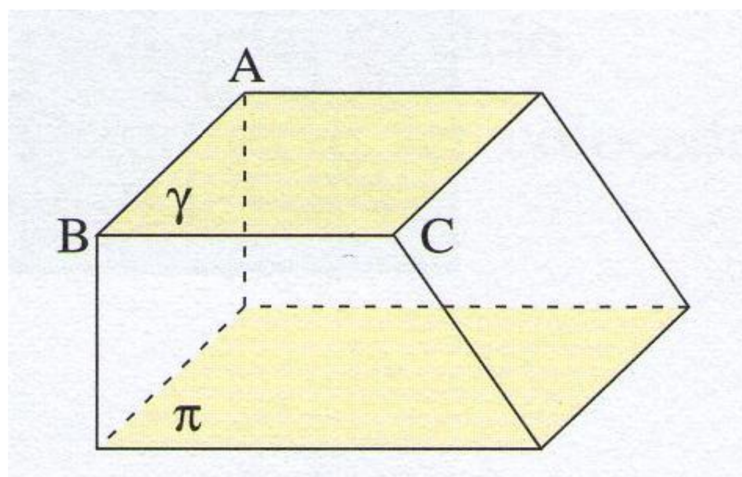
d) O plano IJC é paralelo ao plano GME.

Observa a figura

A recta r está contida no plano β , é paralela ao plano α e, no entanto os planos alfa e beta não são paralelos.

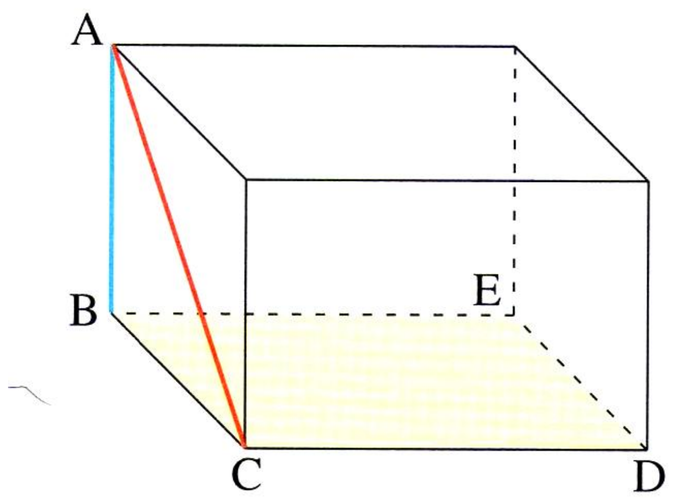


As rectas r e s são paralelas, estão contidas no plano β , cada uma delas é paralela ao plano α e, no entanto, os planos alfa e beta não são paralelos.



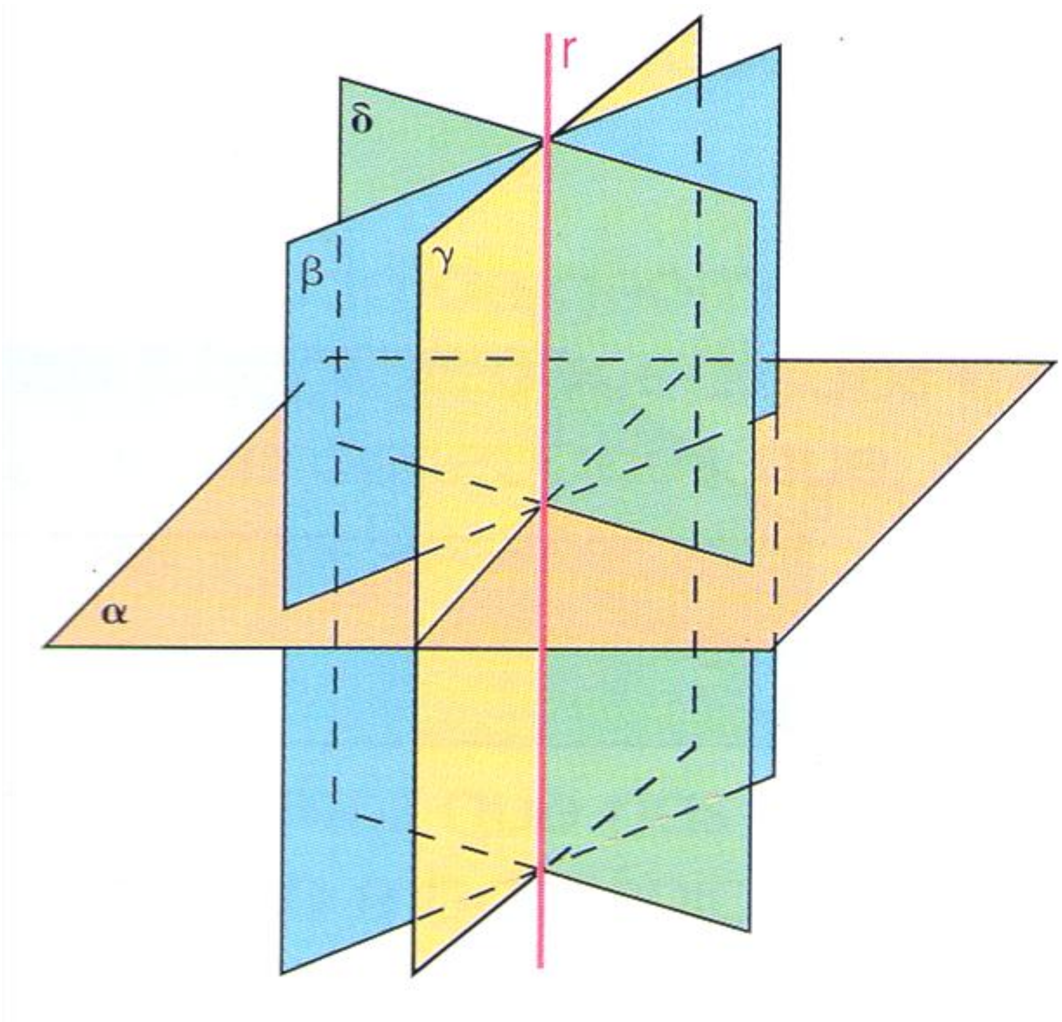
As rectas AB e BC são concorrentes em B, estão contidas no plano γ e são paralelas ao plano π . Os planos γ e π são paralelos.

Exemplo:



A recta AC é perpendicular à recta CD do plano BCD e, no entanto, não é perpendicular ao plano, pois teria que ser perpendicular a duas rectas concorrentes e não a uma só.

Podemos afirmar que a recta AB é perpendicular ao plano BCD porque é perpendicular a duas rectas concorrentes do plano: BE e BC.

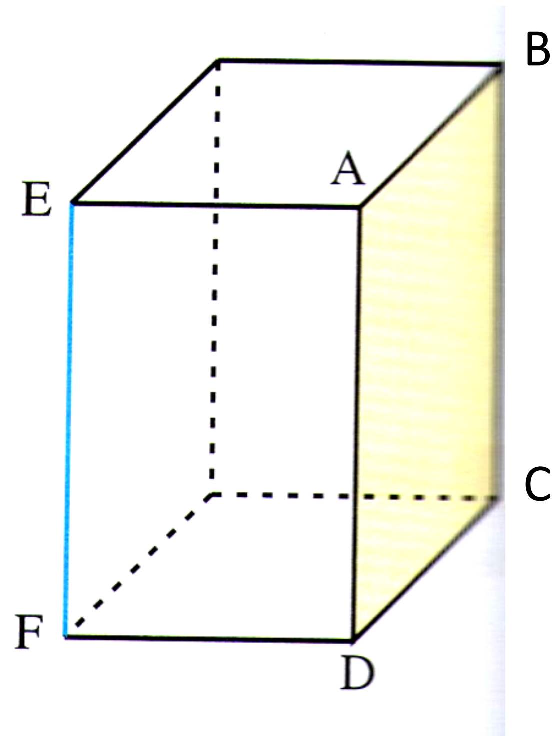


Os planos $\beta, \gamma\ e\ \delta,$ são perpendiculares ao plano α

Exercício:

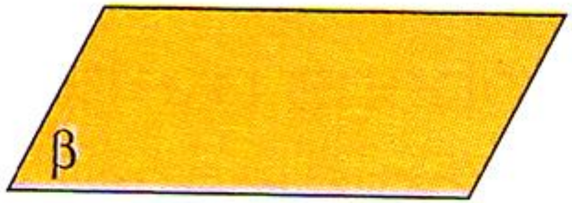
A figura representa um paralelepípedo rectângulo.

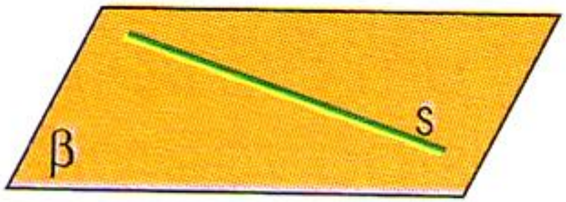
Justifica que a recta EF é paralela à face [ABCD].



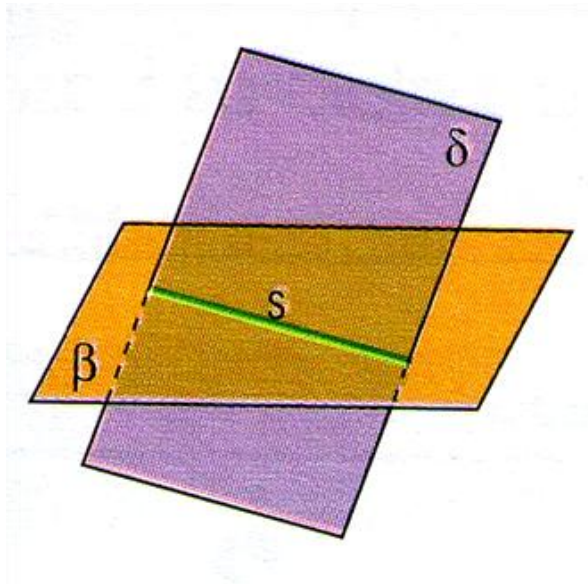
Critério de paralelismo entre **retas e planos**

Como construir uma reta paralela ao plano β ?

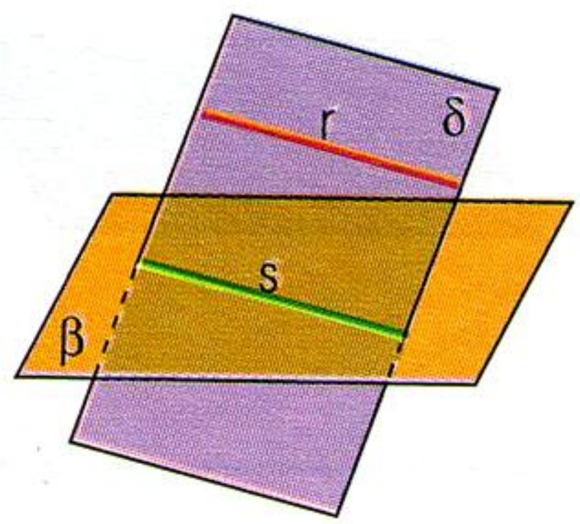




Traçamos uma reta qualquer no plano β.



Imaginamos outro plano distinto de β que contenha a reta s.



Nesse plano, traçamos uma reta r paralela a s.

Então: r // β